Elementa logico-mathematica

L. Geldsetzer

0 Die Logik ist die gemeinsame Methodologie aller Wissenschaften. Ihre Verwendung in einer Wissenschaft ist ein wesentliches Kriterium der Wissenschaftlichkeit einer Wissenschaft oder Disziplin. „Wissenschaft“ ohne Logik ist keine Wissenschaft!

0.1 Das Wichtigste in der Logik ist der logische Formalismus. Er gibt den Gedanken eine logische Form.

0.1.1. Die meisten Formalismen sind nach dem Vorbild von Lautschriftsprachen entwickelt worden, und sie werden bislang am meisten verwendet. Diejenigen Logiker, die deshalb meinen, die Logik sei eine künstliche Sprache mit eigenem Lexikon und eigener Grammatik, halten die Logik insgesamt für eine „Idealsprache“.

0.1.2 Einige Formalismen, insbesondere der sogenannten mathematischen Logik, sind nach dem Vorbild arithmetischer Rechenverfahren entwickelt worden. Diejenigen Logiker, die deshalb meinen, man könne mit Begriffen, gegebenenfalls mit Urteilen und Schlüssen „rechnen“, halten die wesentlichen logischen Formalismen für Kalküle.

0.1.3 Einige Formalismen sind als Graphiken nach dem Vorbild geometrischer Diagramme (Porphyrianische Bäume und deren Umkehrungen zu Begriffspyramiden, Eulersche Kreise, Vennsche Diagramme) entwickelt worden. Sie werden oft nur didaktisch verwendet und gelten als anschauliche Hilfsmittel zur Darstellung ansonsten als unanschaulich angenommener logischer Verhältnisse. Diese übliche Einschätzung wird den graphischen Formalismen nicht gerecht. Diese gleichen in mancher Hinsicht ikonischen Schriftzeichen (wie etwa den chinesischen), die ihre Bedeutung bildhaft-anschaulich darstellen. Mit diesen Schriftzeichen umzugehen ist man im Abendland kaum gewöhnt und lernt es vielleicht allmählich durch die in aller Welt verbreiteten Verkehrszeichen. Wir werden im folgenden den Graphismus der Begriffspyramide in den Mittelpunkt stellen und ihm neue Anwendungen zuweisen.

0.2 Der Formalismus bildet nicht das Logische ab, sondern er ist das Logische. Graphische Formalismen stellen das Logische für das Auge anschaulich dar. Sich daran zu gewöhnen, ist das Studium chinesischer Schriftzeichen hinsichtlich ihres „etymologischen“ Bildgehaltes (den sie neben der Lautdarstellung im wesentlichen beibehalten haben) sehr hilfreich. Erst als erinnerte Schemata werden graphische Formalismen zum Abbild des Logischen.

0.3 Einen Sachverhalt logisch formalisieren heißt, ihm die Gestalt des Formalismus aufzuprägen.

0.4 Logisches Denken besteht darin, die Gedanken gemäß der Struktur des Formalismus zu ordnen und untereinander zu verknüpfen.

0.5 Denken setzt sprachliche Evokationen von Gedanken bzw. Ideen voraus. Das kann nicht bedeuten, daß die Logik dadurch linguistizistisch oder psychologistisch begründet würde. Es bedeutet nur, daß sie nicht ohne Anschauung, Sprechen, Sich-Erinnern und Denken betrieben werden kann.

0.6 Die Logik entnimmt den Sprachen Elemente, die sie für die Konstruktion ihrer Formalismen und die „Lesung“ bzw. Beschreibung von Kalkülen und graphischen Formalismen gebrauchen kann. Die Auswahl solcher Elemente macht die Logik zu einem sprachlichen Code innerhalb der allgemeinen Bildungssprache.

0.6.1 Die Buchstaben (als Lautzeichen) und die logischen Junktoren (Verknüpfungspartikel) bleiben auch in der Logik als sprachliche Elemente erhalten und setzen ihr sprachliches Verständnis voraus. Auch die Anordnungen sprachanaloger Formalismen wie die Aneinanderreihung von logischen Zeichen von links nach rechts in Zeilen und dieser untereinander sind nur von der Schriftsprache her verständlich.

0.6.2 Die Auswahl weiterer logischer Elemente aus den Sprachen knüpft an die grammatische Beschreibung der Sprachen an. Daher kommen viele grammatische Begriffe auch in der Logik vor, wie etwa Sinn und Bedeutung, Terminus, Subjekt und Prädikat, Satz, Zitat, Sequenz, Bedeutungslehre bzw. Semantik, Synonymität, Homonymität, Grammatikalität bzw. Syntax oder Syntaktik. Viele Speziallogiken bzw. spezielle Formalismen unterscheiden sich danach, welche sprachlichen und grammatischen Elemente sie übernehmen. Der grammatische Konjunktiv für den Ausdruck von Vermutungen, d. h. für nicht-behauptende Aussagen, wird in der Logik fast durchweg im Indikativ, also in der Gestalt behauptender Urteile, formalisiert. Der grammatische Konjunktiv ist nur von den Stoikern für die Prämissen ihrer Schlüsse in die Logik übernommen worden. Jedoch liegt er unerkannter Weise den Wahrscheinlichkeitsaussagen zugrunde.

0.6.3 Eine besondere Rolle spielen in der Logik und in der Mathematik die Zitate und ihre Zeichen (Anführungszeichen und mathematische Klammerzeichen). Sprachliche Zitate haben mehrere Funktionen, die nicht immer klar unterschieden und getrennt von einander gebraucht werden, nämlich 1. reine Hervorhebung des Zitatinhaltes; 2. Suspension des Wahrheits- oder Falschheitsgehaltes eines behauptenden Satzes; 3. Sinnverdoppelung oder Vervielfachung (letzteres bei Zitaten von Zitaten) des Sinnes des Zitates (ursprünglicher Sinn des Zitatinhaltes und Argumentbedeutungen für die Zitatverwendung); 4. Suspension des Sinn- und Bedeutungsgehaltes des Zitatinhaltes; 5. Ersetzung des Zitatinhaltes durch eine andere sprachliche oder mathematische Kategorie (z. B.: der Inhalt eines sprachlichen Satzes wird durch den „Begriff des Satzes“, der mathematische Klammerinhalt einer Additionsaufgabe durch „Summe“ ersetzt). Einige dieser Funktionen wurden in der mittelalterlichen Logik als verschiedene „Suppositionen“ von Zeichen herausgearbeitet.

0.6.4 In der klassischen Logik spielen nur die Funktionen 1 bis 3 eine Rolle. In der mathematischen Logik und in der in ihr entwickelten Aussagenlogik werden sämtliche Funktionen gebraucht. Dies begründet wesentliche Unterschiede zwischen der klassischen und der sogenannten mathematischen Logik. Der Unterschied zeigt sich am deutlichsten in der Verwendung der logischen Partikel „meta-“ in der mathematischen Logik.

0.6.5 In der klassischen Logik spielte das „meta-“ in der Formel „metabasis eis allo genos“ („Überstieg zu einem anderen Begriff“, d. h. verschwiegener Themenwechsel in der Argumentation) eine Rolle als Bezeichnung eines logischen Argumentationsfehlers. In der modernen mathematischen Logik bedeutet „meta-“ das dialektische Kunststück, zu etwas anderem überzugehen und zugleich beim Vorgegebenen zu bleiben. Es hat insofern die Bedeutungen 3 bis 5 des Zitatzeichens. Wer in einer „Metasprache“ über die Sprache spricht, macht die Sprache selbst zum Objekt, unterscheidet sie aber zugleich als „Objektsprache“ von den Objekten, und bleibt, will er überhaupt verständlich sprechen, auch in seiner Metasprache zugleich in der allgemeinen (Bildungs-)Sprache.

0.6.6 So sprach Alfred Tarski über den weißen Schnee als Objekt, indem er in der „Objektsprache“ behauptete, daß der Schnee weiß sei (was als „analytisch wahr“ gelten kann!); nannte die Behauptung, indem er sie in der Form von „der Schnee ist weiß“ zitierte, einen „Begriff“ der „Metasprache“ und bewies – für die meisten mathematischen Logiker überzeugend – daß logische Wahrheit darin bestehe, einen „meta-metasprachlichen“ Begriff von der „Übereinstimmung“ des Begriffs der zitierten Behauptung mit der Behauptung selbst zu haben. Und damit glaubte er, den aristotelischen Wahrheitsbegriff der (realistischen) Korrespondenz von Sein und Wissen des Seins auf den Begriff gebracht zu haben. (Vgl. A.Tarski, Die semantische Konzeption der Wahrheit und die Grundlagen der Semantik, 1944)

0.6.7 Die mathematische Logik verschafft sich viele logische Elemente auf dem Umweg über die mathematischen Teile der Bildungssprache und fügt ihnen genuin mathematische Elemente bei. Durch ersteres sind die Synomymien in der logischen Terminologie stark vermehrt worden. Z. B. sagt man logische Konstante oder Funktor (Funktionszeichen) statt Junktor, Variable statt Begriffs- oder Urteilszeichen, Klasse oder Menge statt Umfang bzw. Extension. Durch die mathematischen Elemente ist die Logik erst in den Stand versetzt worden, die Mathematik selbst teilweise zu „logifizieren“.

0.7 Logik und Mathematik sind durch die universitäre (von Platon inspirierte) Integration der Logik (bzw. „Dialektik) ins Trivium (als Gruppe der späteren Geisteswissenschaften) und der Mathematik ins Quadrivium (als Gruppe der Naturwissenschaften) konkurrierende Denkmethodologien geworden. Die sich daraus ergebenden „zwei methodologischen Kulturen“ stehen sich noch immer weitgehend verständnislos gegenüber. Das Mißverhältnis des Gewichtes der „trivialen“ Logik als philosophischer Disziplin und der „quadrivialen“ Mathematik als selbständige Großwissenschaft stellt sich unmittelbar im Verhältnis der heute sogenannten klassischen Logik und der mathematischen Logik dar.

0.8 Die Entwicklung der „mathematischen Logik“ (seit Boole, Jevons, Bolzano, Frege u. a.) war als Versuch der Klärung der logischen Eigenarten des mathematischen Denkens gemeint und verdient Fortsetzung. Da die Gründerväter und die meisten mathematischen Logiker aber selber Mathematiker waren und sind, ist bislang nur Anwendung der Mathematik auf einige logische Gegenstände bzw. Gebilde herausgekommen. Das läßt die Frage offen, ob der mathematischen Denkweise überhaupt Logik zugrunde liegt, oder ob die Mathematik über außerlogische und gänzlich autonome Denkweisen verfügt. Erst bei Lösung dieser Fragen kann man entscheiden, ob die mathematische Logik die klassische Logik ergänzen, verbessern oder gar ersetzen kann (wie viele mathematische Logiker annehmen), oder ob sie eine echte methodologische Alternative zu ihr darstellt.

0.8.1 Von der Beantwortung dieser Frage hängt naturgemäß auch ab, ob in den „quandrivialen“ Naturwissenschaften nach mathematischer Methode anders gedacht werden muß als in den herkömmlichen „trivialen“ Geisteswissenschaften nach nicht-mathematischen, d. h. klassisch-logischen Methoden, ebenso, ob die Geisteswissenschaften selbst „mathematisiert“ werden könnten und sollten.

0.9 Im Folgenden wird die These vertreten, daß die Mathematik ein wesentlicher Teil der klassischen Logik und damit auch insgesamt Logik ist. Sie ist derjenige Teil der klassischen Logik, der von ihren Klassikern als „Dialektik“, d. h. als methodischer Umgang mit dem Widerspruch den Mathematikern überlassen worden ist. Die mathematische Logik muß also einen dialektischen Denkstil der Mathematik widerspiegeln.

0.10 Genuin logische Elemente des Formalismus der klassischen Logik sind Begriff sowie Merkmal (Intension) und Umfang (Extension) des Begriffs, Verknüpfungspartikel (Synkategorem bzw. Junktor), behauptender Satz bzw. Urteil, Schluß sowie Prämisse und Schlußfolgerung, Argument, Theorie, Prinzip (Axiom) Diese Begriffe sind inzwischen auch Termini der logischen Bildungssprache als Teil der Gemeinsprache geworden. Sie bezeichnen gewisse Züge an sprachlichen Artikulationen über sprachwissenschaftliche und grammatische Bestimmungen hinaus. Die Logik hat noch immer die Aufgabe, sie als logische Begriffe zu definieren und sie durch Urteile und Schlüsse in einem theoretischen Zusammenhang zu explizieren, d. h. sie selbst insgesamt in einem logischen Formalismus darzustellen.

0.10.1 Die Bedeutung der genuin logischen Termini läßt sich an sprachlichen Beispielen demonstrieren und dadurch der Umgang mit ihnen lernen. Die Logik ist aber nicht dazu geeignet, ungrammatisches oder gar sinnloses Sprachmaterial (Komponenten der Sprache, die nicht selber Sprache sind!) sinnvoll oder „logisch“ zu machen. Was man Anwendung der Logik auf sprachliches Material (logische Formalisierung) nennt, ist immer eine (wohlwollende) Interpretation sinnvoller sprachlicher Äußerungen im Hinblick auf ihre Logizität.

0.10.2 Die Logik hat zusammen mit wissenschaftlicher Bildung historisch auch die Bildungssprachen logifiziert. Dadurch sind viele sprachliche Wortfelder begrifflich geordnet worden. Der Sprachbenutzer unterscheidet etwa zwischen allgemeineren und spezielleren (konkreten) Begriffen sowie behauptenden und nicht-behauptenden Sätzen. Und daher stammt auch die verbreitete Meinung, die Sprache sei gleichsam naturwüchsig logisch, und inhaltliche sprachliche Beispiele zeigten von sich aus, was eigentlich logisch sei.

0.11 Der Logiker hat vielfach Anlaß, manche sprachlichen wissenschaftlichen Verlautbarungen als außer- oder unlogisch anzusehen.

0.12 Im folgenden wird versucht, die Logik durch einige Überlegungen zu verbessern. Diese beziehen sich auf 1. den Ausbau des klassischen Pyramidengraphismus zur Darstellung der logischen Elemente und ihrer Verknüpfungen. 2. Ergänzung der Begriffslehre durch eine vorgelagerte Formalisierung der intensionalen und extensionalen Begriffskomponenten. 3. Pyramidale Formalisierung der regulären und widersprüchlichen („dialektischen“) Begriffe und Aufweis der Rolle der Induktion und Deduktion zu ihrer Gewinnung. 4. Unterscheidung von ausdrucksbildenden und urteilsbildenden Junktoren. 5. Pyramidale Anordnung und Definition aller Junktoren. 6. Genauere Unterscheidung von Urteils- und Definitionslehre, insbesondere Erklärung der sogenannten partikulären und individuellen Urteile sowie der Gleichungen als

Definitionen. 7. Formalisierung der wahren, falschen und wahr-falschen Urteile. 8. Formalisierung der aristotelischen Syllogismen und der stoischen Schlüsse und Nachweis der Dialektik der Wahrscheinlichkeitsschlüsse. 9. Klärung der Grundbegriffe (Axiome, Prinzipien) der Logik.

1. Man halte nur dasjenige für einen Begriff, bei welchem Merkmale (Intensionen) deutlich und Umfänge (Extensionen) klar sind. „Leere Begriffe" ohne Intensionen und/oder ohne Extensionen gibt es nicht. Und „undefinierbare Grundbegriffe" (Axiome im mathematischen Verständnis) sind ebenfalls keine Begriffe.

1.1 Intensionen sind (erinnerte) Vorstellungen, die einzeln oder zu mehreren durch sprachliche Wörter bezeichnet werden können, die diese Vorstellungen evozieren. Im Begriff werden sie mit Extensionen vereinigt. Im pyramidalen Formalismus werden die formalen einzelnen Intensionen bzw. Merkmale eines Begriffs durch große lateinische Buchstaben in Begriffspositionen (Kreise in der Pyramide) eingeschrieben. Bei einer semiformalen Notierung schreiben wir deren sprachliche Bezeichungen in die entsprechenden Kreise ein.

1.2 Extensionen sind (erinnerte) Vorstellungen, die einen Erfahrungsbereich für die Intensionengewinnung durch Induktion bestimmen. Im pyramidalen Formalismus werden sie formal durch sämtliche Unterbegriffe unter einer Begriffsposition bezeichnet, die den Erfahrungsbereich evozieren. Extensionen induzierter Begriffe beschreiben stets „tatsächliche" (sinnlich erfahrene), aber niemals „mögliche" (noch nicht erfahrene) Instanzen, wie die seit Hume übliche Induktionstheorie annimmt. Über „nichterfahrene" Instanzen kann man allenfalls phantasieren. Erfährt und erforscht man „neue Instanzen", so kann nur herauskommen, daß sie entweder genau so sind, wie die schon erfahrenen Fälle, die schon als Induktionsbasis gedient haben, oder daß sie anders sind. Dann gehören sie jedoch nicht zu den Instanzen des induzierten Begriffs.

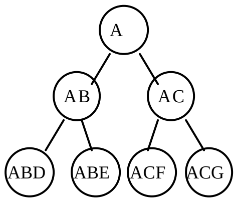
1.2.1 Die Meinung (etwa von E. Cassirer in: „Substanzbegriff und Funktionsbegriff", aber auch von Thomas von Aquin), je allgemeiner ein Begriff sei, desto „inhaltsreicher" werde er, kann sich nur auf die Umfänge (Extensionen) beziehen. Aber bei Begriffen von „Inhalt" zu sprechen, bezieht sich nur auf die jeweiligen Intensionen. Und so wörtlich verstanden ist die Meinung Cassirers falsch.

1.2.2 Neben dem Seinsbegriff ist auch der Begriff des Nichts einer der allgemeinsten induzierten Begriffe, der gemäß den einzelnen Sinneserfahrungen Art- und Unterartbegriffe enthält. Der Begriff „Nichts" ist aber keinesfalls das, wofür man ihn in der Logik allgemein hält, nämlich Bedeutung und Gegenstand aller widerspruchsvollen Begriffe und falschen Urteile. Und er ist auch keineswegs eine Substantivierung des logischen Negationsjunktors.

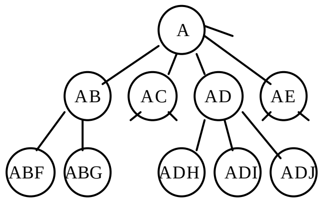
1.3 Reguläre (widerspruchslose) Begriffe entstammen einem simultan wahrnehmbaren und so erinnerten Erfahrungsbereich. Sie unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Allgemeinheit, d. h. der Anzahl der in ihnen vereinigten Merkmale. Allgemeinste Begriffe (oberste Gattungen) enthalten mindestens ein Merkmal. Untere Begriffe enthalten immer mehr, aber niemals unendlich viele Merkmale, wie man in der scholastischen Logik unter der Maxime „individuum est ineffabile" fälschlich annahm. Sogenannte Eigennamen bzw. Kennzeichnungen stehen für unterste Begriffe im pyramidalen Formalismus, die sich genau wie jeder andere Begriff nur durch ein Merkmal (ihre spezifische Differenz) von anderen unterscheiden.

1.4 Begriffe über einem Erfahrungsbereich ordnen sich durch ihre intensionalen und extensionalen Verschränkungen in pyramidalen Strukturen. Die Begriffspyramide drückt das Allgemeinheitsgefälle von Gattungen, Arten und Unterarten bzw. Individuen (Kennzeichnungen) aus. Allgemeinere Begriffe (Gattungen) haben entweder zwei (dihäretische) oder mehrere (multiple) Begriffe als Artbegriffe unter sich. Nur eine Begriffspyramide mit ausschließlich regulären Begriffen kann vollständig widerspruchslos sein. Sie stellt den logischen Formalismus einer widerspruchslosen Theorie über einem Erfahrungsbereich dar.

Extensional-dihäretische Begriffs-Pyramide mit eingeschriebenen Intensionen



Extensional-multiple Begriffspyramide mit eingeschrieben Intensionen



1.5 Daß der pyramidale Formalismus ein Allgemeinheitsgefälle zeigt, besagt nicht, daß allgemeinere Begriffe „höher" wären als weniger allgemeine. Antike und mittelalterliche „porphyrianische Bäume" stellen das Allgemeinheitsgefälle von unten nach oben dar (vgl. des Porphyrios' Einleitung in das aristotelische Organon). Hier sind die allgemeinen Begriffe auch nicht „tiefer" bzw. „niedriger". Beide Darstellungsweisen sind unvermeidliche optische Täuschungen des Formalismus, die in der Philosophiegeschichte erhebliche Fehler bei der ontologischen Bewertung der Universalien (Allgemeinbegriffe) nach sich gezogen haben. Mit Recht bemerkt Hegel, daß man mittels der Intensionen in die Begriffe eindringt und somit das Allgemeine immer schon im Einzelnen („Konkreten") enthalten ist und nirgends sonst.

1.6 Eine reguläre Begriffspyramide zeigt, was eine logische Induktion (Epagogé) bzw. begriffliche Abstraktion ist. Merkmalsreiche unterste Begriffe werden verglichen und darauf hin geprüft, welche Merkmale in ihnen gleich sind, d. h. Identitäten darstellen, und worin sie sich spezifisch unterscheiden. Identische Merkmale werden durch gleiche Buchstaben dargestellt. In den sogenannten höheren bzw. allgemeineren Begriffen werden sie zusammengefaßt und wiederum entsprechend überprüft. Zuletzt wird die jeweils höchste Gattung für den Prüfbereich gebildet, die mindestens ein allen Unterbegriffen gemeinsames „generisches" Merkmal enthält.

1.6 Die logische Induktion ist immer vollständig. Nach Wilhelm von Ockham genügt dafür ein einziges Individuum. Nach Francis Bacon spielt die Anzahl von Beispielsinstanzen logisch keine Rolle, da „in der Logik nicht gezählt wird". Ersichtlich legt ein an einem Beispiel induziertes Begriffsmerkmal ein für allemal fest, ob bislang „unbekannte Fälle" es aufweisen oder nicht und somit in die Extension des induzierten Begriffs fallen oder nicht. Die zu John Stuart Mills Zeiten entdeckten „schwarzen australischen Schwäne" haben nicht die vollständige Induktion des Begriffs „Schwan" in Frage gestellt, sondern eine neue Artenteilung der Schwäne gemäß ihrer Farbe induziert.

1.7 Die sogenannte vollständige Induktion in der Mathematik (z. B. für die mathematische Definition des Zahlbegriffs) ist unvollständig und daher nicht logisch. In der Mathematik, in der gezählt wird, hat noch niemand „alle Zahlen" gezählt. Aus den üblicherweise (nach B. Russell) angenommenen zwei Begriffen „Ausgangselement" und „Nachfolger" läßt sich ersichtlich kein allgemeiner (für das Ausgangselement und die Nachfolger gemeinsamer) Zahlbegriff induzieren. Die Mathematik verfügt bislang nicht über einen logischen Zahlbegriff.

1.8 Die Induktion ist ein Begriffsbildungsverfahren durch Definitionen, kein Urteilsverfahren. Erst recht ist sie kein Verfahren zur Gewinnung von Gesetzen, wie J. St. Mill annahm. Induktionen und durch sie gebildete Begriffe sind nicht wahrheitswertfähig.

1.8.1 Was man die „Unvollständigkeit der Induktion" nennt, sollte man auf die Unterbestimmtheit mancher Begriffe beziehen. Ein Begriff wird nur durch die vollständige Angabe seiner Intension(en) und seiner Extension genau bestimmt, d. h. definiert.

1.8.2 Fehlt es bei einem unterbestimmten Begriff am einen oder dem anderen, so hat man es mit einem unklaren und/oder undeutlichen Begriff zu tun. Es ist einer der Hauptfehler in der Logik, wenn man davon ausgeht, Logik habe es grundsätzlich mit klaren und deutlichen, d. h. vollständig bestimmten Begriffen zu tun.

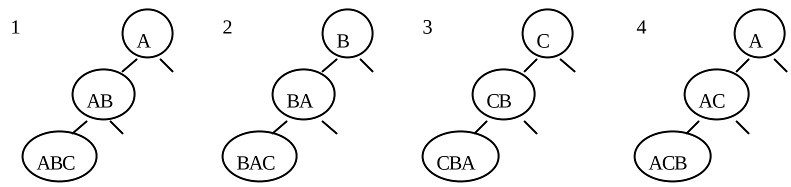
1.8.3 Unterbestimmte Begriffe werden durch Definitionen genauer oder vollständig bestimmt. Definitionen umschreiben extensional unterbestimmte Begriffe durch (genauere) Angabe ihrer Intensionen, und intensional unterbestimmte Begriffe durch (genauere) Angabe ihrer Extensionen. Die Definition stellt in der Regel einen Begriff durch zwei äquivalente Ausdrücke dar. Die definitorische Äquivalenz ist umkehrbar (kommutativ).

1.8.4 Beispiele für unterbestimmte Begriffe sind partikulär und individuell quantifizierte Begriffe. „Einige Lebewesen“ bzw. „ein Lebewesen“ läßt unbestimmt, um welche Art oder welches individuelle Lebewesen es sich handelt. Erst durch die äquivalente Ergänzung durch eine Intension, z. B. „tierische“ bzw. „ein Hund“ wird der Begriff klar und deutlich. Die genaue Äquivalenzdarstellung lautet hierbei: „einige Lebewesen = Tiere = nicht-Pflanzen“) bzw. „ein Lebewesen = (dieser eine) Hund“.

1.8.5 W. V. O. Quines Explikation von „gavagai“ (aus der Indianersprache) als indeterminiertem „Begriff“ zeigt, daß er die Struktur wissenschaftlich definierter Begriffe nicht durchschaut hat. Seine Folgerungen daraus für einen wissenschaftstheoretischen Holismus und die „Unbestimmtheit der Übersetzung“ von Begriffen und Theorien sind daher abwegig.

1.9 Die Induktion legt keine bestimmte Abstraktionsrichtung zu bestimmten Oberbegriffen fest. Jedes beliebige Merkmal eines empirischen Beispielfalles läßt sich für die Wahl einer Induktionsrichtung benutzen. Dadurch wird ein Induktionsrahmen für die Anordnung spezifischer Merkmale untergeordneter Begriffe festgelegt.

1.9.1 Durch die verschiedenen Induktionsrahmen unterscheiden sich verschiedene Theorien über demselben Erfahrungsbereich. Epikur (s. Zitate bei Diogenes Laertius) scheint dies als erster bemerkt zu haben Theorien stellen mittels eines Induktionsrahmens die Daten unter einen allgemeinen Gesichtspunkt und ordnen sie extensional-quantifizierend nach Arten („einige“) und Individuen („ein“). Nehmen wir als Beispiel drei Merkmale des Individuums Sokrates (auf deren Reihenfolge es für die Beschreibung des Individuums nicht ankommt), die als Induktionsrahmen verschiedene Definitionen von „Sokrates“ erlauben:



Merkmale (Intensionen): A = griechisch, B = philosophisch, C = sokratisch

Sokrates = ein philosophischer Grieche	Sokrates = ein griechischer Philosoph	der Grieche Sokrates = ein philosophischer Sokratiker	der Philosoph Sokrates = ein sokratischer Grieche

1.10 Eine regelrechte logische Deduktion setzt die induktive Gewinnung eines Induktionsrahmens mit einem dadurch wohldefinierten allgemeinsten Begriff voraus. Der Induktionsrahmen enthält das generische Merkmal. In der Deduktion werden die übrigen induktiv gewonnenen Merkmale als spezifische Merkmale auf die unteren Begriffspositionen verteilt und liefern deren Definition. Im obigen Formalismus läßt sich in der ersten Figur deduktiv ablesen: „einige A = AB“; „ein (bestimmtes) A = ABC“.

1.10.1 Dies geschieht durch die traditionell sogenannten partikulären und individuellen Urteile (Subalternationen). Diese sind aber keine wahrheitswertfähigen Urteile, wie die klassischen Urteilslehre voraussetzt, sondern Definitionen. Es sind konventionelle Zuweisungen von Intensionen (als spezifische Differenzen) an nur extensional quantifizierte und deswegen unvollständig bestimmte Begriffspositionen unterhalb eines allgemeinen Oberbegriffs (dem Induktionsrahmen). Daher sind sie nicht mit der Kopula („ist“), sondern als Äquivalenzen mit dem Gleichheitszeichen oder sprachlich mit „heißt (d. h.)“ zu formulieren.

1.10.2 Bei der Definition dihäretischer Artbegriffe ergeben sich positive und negative Definitionen jeweils paarweise. Man liest in den obigen Figuren ab: 1.„einige Griechen = Philosophen“ / “einige Griechen = Nicht-Philosophen“. 2. „einige Philosophen = die griechischen / einige Philosophen = die nicht-griechischen“. 3. „einige Sokratiker = die philosophischen / einige Sokratiker = die nicht-philosophischen“. 4. „einige

Griechen = die sokratischen / einige Griechen = die nicht-sokratischen". Definitionen (als vermeintliche partikuläre und individuelle Urteile) lassen sich leicht an den so mitnotierten „Gegenproben" für die Existenz der Nebenart (ggf. von Nebenindividuen), die hier durch (nicht in der Pyramide eingezeichnete) Negationen gekennzeichnet sind, erkennen.

1.10.3 Individuen sind in der Regel unterste Begriffe in multiplen Begriffsreihen. Sie werden meist nur positiv definiert: z. B. „ein Grieche = der Philosoph Sokrates". Die Gegenprobe grenzt das Individuum von allen anderen Individuen zusammen ab, z. B. durch „kein anderer als...".

1.10.4 Kant wollte bekanntlich den Anselmischen Gottesbeweis dadurch widerlegen, daß er zeigte, daß sich aus einem Allgemeinbegriff nicht die Existenz eines unter diesen Begriff fallenden Individuums deduzieren lasse. Er deduzierte also aus dem Begriff „Taler", daß „kein Taler in seiner Tasche" sei. Wenn er dies tatsächlich bemerkte, mußte er wenigstens einen klaren und deutlichen Begriff vom Taler besitzen. Und daraus hätte er genauer deduzieren müssen, daß sich „einige Taler in Taschen" und „einige Taler nicht in Taschen" befinden. Und erst dann hätte er weiter deduzieren können, daß, wenn sich in der individuellen „Kantischen Tasche" kein Taler befindet, die Taler sich entweder in anderen Taschen oder überhaupt nicht in Taschen, sondern sonst wo befinden.

1.10.5 Bei zahlenmäßig quantifizierten Begriffen (Maßbegriffe bzw. metrische Begriffe, besonders der Physik) wird die logische Partikularisierung „einige" durch Zahlenwerte ersetzt. Die Maßeinheit dient dabei als logische Individualisierung. Der nicht quantifizierte metrische Begriff hat die logische Quantifikation „alle", die sich bei den Allgemeinbegriffen freilich von selbst versteht und deshalb nicht eigens erwähnt bzw. notiert wird. E. Cassirers „Funktionsbegriffe" sind zahlenmäßig quantifizierte Begriffe.

1.11 In der mathematischen Logik werden die Partikularisierung und die Individualisierung von Begriffen gewöhnlich zusammengefaßt durch den Ausdruck „mindestens ein...". Dies gilt zwar als Fortschritt in der Präzision, ist aber gerade das Gegenteil davon.

1.11.1 Die in der mathematischen Logik üblich gewordene Verbindung des Existenzjunktors („es gibt") mit der Partikularisierung und Individualisierung verdankt sich der falschen Voraussetzung, daß Definitionen Behauptungssätze mit einem Wahrheitswert seien. Ein Satz wie „es gibt mindestens ein x, so daß x = f(y)" drückt jedoch nur in pleonastischer Weise aus, daß der unterdeterminierte Begriff x als Spezifikation des Oberbegriffes y zu verstehen ist (das ist die intensionale Definition), und daß x quantifizierbare Extensionen hat.

1.12 Die Verschmelzung („Synthese") der Intensionen allgemeinerer Begriffe mit spezifischen Merkmalsintensionen geschieht sprachlich oft durch Genitivbildungen (z. B. „Haus der Gäste") oder direkte Vereinigung der entsprechenden Wörter mittels eines Bindestrichs oder Zusammenschreiben (z. B. „Gäste-Haus" bzw. „Gasthaus". Es handelt sich im Beispiel um eine Spezifikation des Begriffs „Haus" durch „Gast". Der Begriff („Haus") wird mit einem seiner Unterbegriffe zusammen genannt, so daß das generische Merkmal des unteren Begriffs zugleich mit der spezifischen Differenz offengelegt wird. Das Verhältnis der so verschmolzenen Begriffe ist transitiv, d. h. nicht umkehrbar.

1.12.1 Werden die Intensionen ganzer Begriffe, die nicht dihäretische Artbegriffe einer gemeinsamen Gattung sind, zu einem Begriffe verschmolzen, so entstehen Produktbegriffe. Auch sie werden sprachlich durch Bindestriche oder Zusammenschreibung signalisiert. Dabei ist die Verschmelzung kommutativ. Das Verfahren liegt besonders der Bildung vieler physikalischer Begriffe mittels der mathematischen Produktbildung (Multiplikation) zugrunde, z. B. „Masse × Beschleunigung" (= Beschleunigungs-Masse = Massen-Beschleunigung = Energie). Multiplikation ist also keine Begriffsverknüpfung durch einen Junktor, sondern eine unmittelbare Begriffsverschmelzung.

1.12.2 Der logische Begriff des Begriffs ist selbst ein Produktbegriff aus den Begriffen „Intension" und „Extension": Begriff = Intension × Extension = extensionalisierte Intension = intensionalisierte Extension.

1.12.3 Die sogenannten Relationsbegriffe werden in der Relationenlogik als „2- oder mehrstellige Prädikatsbegriffe" vorgestellt. Es handelt sich bei diesen jedoch um Ausdrücke, in denen mehrere Begriffe durch nicht-satzbildende Junktoren oder sprachliche Verknüpfungspartikel verbunden sind. Ansonsten läßt sich der Begriff „Relation“ und seine Arten und Unterarten wie jeder andere Begriff in einer Begriffspyramide definieren. Daß besonders mathematische Relationen (z. B. größer, kleiner, zwischen, Vorderglied, Nachfolger, usw.) Gegenstand der Relationenlogik geworden sind, zeigt an, daß die Mathematik noch nicht über eine logische Theorie der mathematischen Relationen verfügt.

1.13 Mathematische Deduktionen gelten in der Mathematik als Beweisverfahren. Man sagt (nach Euklids Vorbild), daß dabei die Wahrheit von Theoremen (Urteile als Lehrsätze einer Disziplin oder Theorie) durch ihre Ableitung aus Axio men und ggf. anderen Theoremen nachgewiesen würde. Soweit es sich dabei jedoch um Gleichungsdarstellungen und ihre Umwandlungen bis zur sogenannten Auflösung handelt, wird dabei nur die Wohlgeformtheit aller vorkommenden und im „Beweisgang“ benutzten Definition nachprüfbar aufgezeigt. Bei Rechenaufgaben wird durch die Äquivalenz ein mathematischer Ausdruck durch einen Zahlenwert (und umgekehrt) definiert.

1.14 Widersprüchliche Begriffe (contradictiones in terminis bzw. contradictiones in adiecto) sind nicht induzierbar. Sie werden deduktiv gebildet. Sie verschmelzen induktiv gewonnene reguläre dihäretische Begriffe (die in vollständiger Disjunktion zueinander stehen) zu einem Begriff, welcher die „sich ausschließenden“ spezifischen Differenzen bzw. Merkmale zugleich und gemeinsam enthält. Sie sind deshalb nur aus heterogenen Erinnerungen und mittels der Phantasie (Spekulation) bildbar, nicht aber aus der direkten sinnlichen Wahmehmung und deren erinnernder Fixierung. Z. B. kann man Lebewesen nicht als lebendige und tote zugleich wahrnehmen, wohl aber kann man sich an beide Zustände erinnern und sie zum Begriff der „Sterblichkeit“ vereinigen. Die traditionelle Logik behauptet deshalb von ihnen, es entspreche ihnen „Nichts“ in der Realität. In der Tat entsprechen ihnen jedoch Teile der Realität, die nicht zu einem gemeinsamen Erfahrungskontext gehören. Wenn dies nicht so wäre, könnte man sich nichts unter ihnen vorstellen. Widersprüchliche Begriffe sind die begrifflichen Bausteine der „möglichen Welten“.

1.14.1 Widersprüchliche Begriffe sind nicht negierbar, weil sich die in ihnen enthaltenen spezifischen Differenzen schon gegenseitig negieren. Durch eine Negation werden diese Bedeutungen nur ausgetauscht, die Gesamtbedeutung des widersprüchlichen Begriff bleibt somit erhalten. Gleichwohl kommt es häufig vor, daß nicht als widersprüchlich durchschaute Begriffe negiert werden. Das führt zwangsläufig zu weiteren Widersprüchen bei ihrer Verwendung in Ausdrücken und Urteilen.

1.14.2 Der in der Logik und in vielen Wissenschaften prominenteste widersprüchliche Begriff ist der Begriff der Möglichkeit. Er wird aus den beiden induzierbaren Begriffen „Sein“ und „Nichts“ verschmolzen. Er ist keineswegs deren gemeinsame Gattung. Wenn er dies wäre, müßte beim Möglichkeitsbegriff gerade von den Merkmalen des Seins und des Nichts abstrahiert (abgesehen) werden. Er enthält aber beide (als sich ausschließende) Merkmale gemeinsam. Daher ist alles Mögliche zugleich Sein und Nichts. „Mögliche Welten“ sind keine Seinswelten, aber indem sie (besonders von Logikern) ausgedacht und konstruiert werden, sind sie auch „nicht Nichts-Welten“.

1.14.3 Der Möglichkeitsbegriff ist, wie von widersprüchlichen Begriffen allgemein gilt, nicht negierbar. Denn das „Unmögliche“ verstünde sich dann nur als ausgetauschte Ausgangsbegriffe: „Nicht-Sein“ und zugleich „Nicht-Nichts“, wobei ersteres wiederum „Nichts“ und letzteres „Sein“ bedeutet. Daß Aristoteles in seiner Modallehre das „Unmögliche“ als das Widersprüchliche schlechthin definiert hat, hat, zeigt nur, daß er die Widersprüchlichkeit des „Möglichen“ nicht erkannt hat.

1.14.4 Widersprüchliche Begriffe werden im täglichen Sprachgebrauch so häufig verwendet, daß man sie gewöhnlich für reguläre Begriffe hält. Als Beispiel haben wir oben schon die „Sterblichkeit“ erwähnt, die man traditionell als reguläres begriffliches Prädikat in Aussagen über den Menschen behandelt („alle Menschen sind sterblich“). Tatsächlich gibt es aber nur tote und/oder lebendige Menschen. Der „sterbliche Sokrates“ ist bekanntlich schon lange tot, zugleich aber, wie ebenfalls bekannt, in der Erinnerung der abendländischen Kultur höchst lebendig. Also kann seine „Sterblichkeit“ nur bedeuten, daß er „tot und lebendig zugleich“ ist.

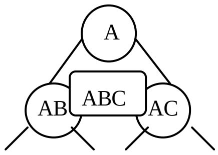
1.14.5 Als spekulative Konzepte für Mathematik, Kunst und Technik sind widersprüchliche Begriffe kreativ, da sie über die Erfahrung hinausgehen. In der christlichen Theologie sind sie als Dogmen Gegenstand des Glaubens. Für die Forschung sind sie heuristisch fruchtbar und daher unentbehrlich. Im allgemeinen Sprachgebrauch gelten sie als Ausdrücke für „Unmögliches“ (Oxymora: hölzernes Eisen, schwarzer

Schimmel). In der Argumentation verursachen sie Zweideutigkeiten, die gegeneinander ausgespielt werden können, wie bei den Paradoxen. Der Formalismus ihrer Bildung liefert eine Grundlage für eine logische Theorie der Kreativität.

1.14.6 Kreativität wird allgemein für ein theorie-resistentes Phänomen gehalten. Diese Meinung verdankt sich vermutlich theologischen Schöpfungsmythen und einem säkularisierten Geniekult. Die einfachste „Kreation“ besteht jedoch in der Verschmelzung von in heterogenen Erfahrungsbereichen induzierten Begriffen zu widersprüchlichen und / oder Dispositionsbegriffen, die in dieser Verschmelzungsgestalt also nicht in der Erfahrung vorkommen. Diese Verschmelzungsleistung kann nur auf Grund des Gedächtnisses und der Phantasie erbracht werden. Z. B. läßt sich der Begriff des Vogels und des Pferdes zum Dispositionsbegriff des „Pegasus“ verschmelzen, wie dies die Phantasie der Künstler seit langem vorgemacht hat. Als heuristischer Begriff kann er zur Forschung danach dienen, ob es dergleichen in der Wirklichkeit gibt (was in der Antike vielfach betrieben worden ist). Als (gentechnisches) Züchtungskonzept könnte er zur Erschaffung entsprechender Lebewesen führen. (Entsprechendes ist heute in der Züchtung von „Kartoffeltomaten“ bzw „Tomatenkartoffeln“ schon erreicht worden). Wird ein solches Lebewesen gefunden oder technisch erzeugt, so verliert sein Begriff seinen widersprüchlichen Charakter und wird zu einem regulären und auf Grund der Erfahrungen mit ihm induzierbaren neuen Begriff, der als spezifizierter Unterbegriff einem der Ausgangsbegriffe zuzuordnen ist (vgl. das Pegasusbeispiel: Der gezüchtete Pegasus wäre entweder ein pferdartiger Vogel oder ein vogelartiges Pferd). Entsprechendes gilt von allen technischen Geräten und darüber hinaus von den Gebilden „möglicher Welten“.

1.14.7 Widersprüchliche Begriffe lassen sich an jeder Stelle einer Begriffspyramide zwischen je zwei dihäretischen (vollständig disjunkten) Begriffen als deren Verschmelzung einschreiben. Sie enthalten die sich ausschließenden (im Negationsverhältnis zueinander stehenden) spezifischen Differenzen der Ausgangsbegriffe gemeinsam. Das unterscheidet sie von dem Oberbegriff, der die spezifischen Differenzen nicht enthält. Sie besitzen keine eigene, nur für sie geltende Extension, weshalb man von ihnen sagt, es entspreche ihnen nichts in der Wirklichkeit. Genau genommen umfaßt jedoch der widersprüchliche Begriff – ebenso wie der Oberbegriff – die Extensionen der verschmolzenen Ausgangsbegriffe gemeinsam. Daher werden viele widersprüchliche Begriffe mit regulären Allgemeinbegriffen verwechselt Z. B. ergibt sich, wie schon gesagt, der Begriff „Möglichkeit“ als widersprüchliche Verschmelzung der Begriffe „Sein“ und „Nichts“. Modallogiker aber halten ihn gewöhnlich für deren regulären Oberbegriff. Und so werden ihnen die wirklich „seiende“ und die „nichtseiende“ Welt zu Arten oder Teilen der „möglichen Welten“.

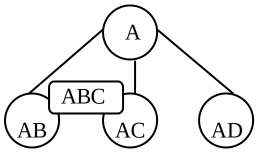
Widersprüchlicher Begriff zwischen dihäretischen Artbegriffen



Beispiel:
A = organisches Wesen
AB = lebendiges organisches Wesen
AC = totes organisches Wesen
ABC = lebendig-totes ("sterbliches") organisches Wesen

1.14.8 Irreguläre sogenannte konträre Begriffe lassen sich zwischen Begriffen in multiplen Artenreihen einschreiben. Ihre Extension besteht dann aus denjenigen der verschmolzenen Artbegriffe. Es handelt sich hier um die sogenannten Dispositionsbegriffe, die in den Naturwissenschaften und in der Psychologie (Vermögen, Anlagen, Kräfte, Dispositionen) besonders häufig vorkommen.

Dispositionsbegriff zwischen Artbegriffen einer multiplen Artenreihe



Beispiel:
A = Aggregatzustand
AB = fest
AC = flüssig (geschmolzen)
AD = dampfförmig
ABC = schmelzbar

1.15 Der Zahlbegriff läßt sich als widersprüchlicher Begriff aus den logischen Quantifikationsjunktoren deduzieren und so definieren. Als Gattungsbegriff umfaßt er Arten und Unterarten mit jeweiligen Zahlindividuen („Zahlen"). Die Zahlindividuen weisen logisch keine Wohlordnung im Sinne einer Reihenfolge auf. Dies gilt von den sogenannten Kardinalzahlen, deren „Mächtigkeit" bzw. „Größe" man durch unmittelbare Anschauung von übersehbaren Mengen lernen muß. Man erfaßt so Paare, Tripel, Quadrupel, Fünfer-, Zehner- Zwölfer- („Dutzend") und evtl. Zwanzigergruppierungen, und dies meist durch Vergleich mit den Gliedmaßen der Finger und/oder der Füße. Die meisten Sprachen haben dafür eigene elementare Zahlbezeichnungen entwickelt.

1.15.1 Die sogenannten Ordnungszahlen (der Erste, der Zweite...) werden innerhalb der jeweiligen Arten und Unterarten erst durch besondere arithmetische Ordnungsverfahren (z. B. Summenbildung mit Ausgangszahl und hinzugefügter Einheit) hergestellt. Das Verfahren geht vermutlich auf die Erfahrung der Geburtsfolge in den Familien zurück, der sich z. B. viele römische und japanische Vornamen der Kinder verdanken. Sie liegen gewöhnlich im Bereich der Anzahl der von einer einzigen Frau geborenen Kinder. Auch soziale Ränge dürften bei diesen Ordnungszahlbezeichnungen eine Rolle gespielt haben (Fürst als „Prinzeps" = Erster). Ordnungszahlen besitzen ihre eigene Dialektik. Sie bezeichnen wesentlich nur eine zu einer vorhandenen Zahl (Menge) von Gegenständen hinzukommende Einheit, zugleich aber muß die Ausgangszahl mitgedacht werden. Darauf beruht die übliche mathematische Definition von Zahlen als „Anfangsglied + Nachfolger". Wobei früher die Einheit als Anfangsglied galt, so daß die Zwei die erste tatsächlich definierte Zahl war. Jetzt setzt man die Null als Anfangsglied, um die Eins als erste definierte Zahl zu erhalten (es handelt sich dabei ersichtlich um eine „creatio ex nihilo" der Zahlen).

1.15.2 Der logische Begriff der Zahl entsteht aus der Verschmelzung der im dihäretischen Verhältnis zueinander stehenden Quantifikationsjunktoren der Individualisierung („ein") und der Universalisierung („alle"). Man erinnere sich an die in der „Denkbarkeit" widersprüchlicher Begriffe wirksamen Vorstellungen: Man kann empirisch nacheinander seine Aufmerksamkeit auf „ein" oder auf „alle" Gegenstände eines Wahrnehmungsbereiches richten, aber man kann nur in der Erinnerung oder in der Phantasie „einen und alle" zugleich vorstellen. Genau das aber wird bei Zahlvorstellungen gefordert, nämlich „alle (das Gesamte) als eines" oder umgekehrt „eines als ein Gesamt von allen" zu denken.

1.15.3 Der mathematische Zahlbegriff tritt an die Stelle des logischen Quantifikationsjunktors der Partikularisierung („einige"), der in der Logik als selbständiger Quantifikator erhalten bleibt. Er ersetzt diesen in allen quantifizierenden Wissenschaften durch (gespreizte) Zahlenwerte zwischen der logischen Einheit und der Allheit. Die kontradiktorische Verschmelzung der logischen Junktoren Allheit (im folgenden Schema: „n") und Einheit (im Schema. „E") definiert den Zahlbegriff somit als „Einheit von Allheiten" (En) oder auch „Allheit von Einheiten" (nE) oder prägnanter als „All-Einheit". Diese verschmolzenen Intensionen des allgemeinen Zahlbegriffs bleiben als generische Merkmale in allen speziellen Zahlbegriffen und den (individuellen) einzelnen Zahlen als Bedeutungskomponenten erhalten.

1.15.4 Solange die Arithmetik als Quantifizierung geometrischer Gebilde betrieben wurde, wie bei Euklid und bis in die Zeiten des Descartes, hatten ihre Begriffe geometrische Intensionen und zahlenmäßige Extensionen. Daher wurde die Eins nicht als Zahl, sondern als logische Einheit verstanden. Ebenso konnte das Unendliche keine Zahl, sondern nur eine logische Allheit sein. An Stelle der Null gab es das logische „kein", und negative Zahlen waren noch bloß negierte Quantoren.

1.15.5 In der „quadrivialen" Physik wird die arithmetische Quantifizierung auf geometrisch konstruierte bzw. modellierte Naturgegenstände angewandt. Alles Meßbare muß zunächst geometrisiert werden.

1.15.6 Die moderne Arithmetik macht die Quantoren selbst zu Intensionen ihrer Begriffe und quantifiziert sie zugleich. Darauf gründet ihre Dialektik: Die Bedeutung (Intension) einer Zahl ist ihre Extension. Und die Extension einer Zahl ist ihre Bedeutung.

1.15.7 Der allgemeine Zahlbegriff ist das, was man in der Arithmetik „natürliche Zahl" nennt. (Natürlich ist in der gesamten Mathematik überhaupt nichts „natürlich"). Die im allgemeinen Zahlbegriff verschmolzenen Ausgangsbegriffe („ein" und „alle" bzw. „Einheit" und "Allheit") stehen logisch im Verhältnis der vollständigen Disjunktion zueinander. Logisch gilt daher: „Einheit ist nicht Allheit" und „Allheit ist nicht Einheit". In der mathematischen Logik und in der Arithmetik aber gilt: „Jede Allheit ist zugleich eine

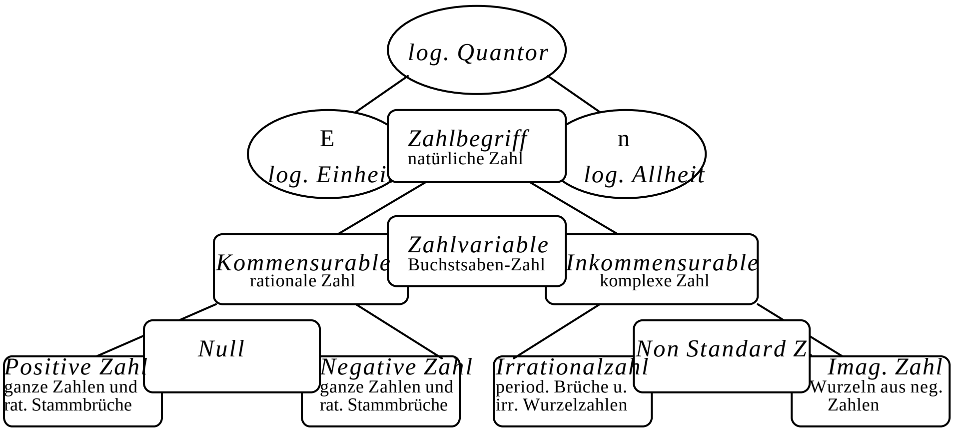
Einheit (von Allheiten und/oder Einheiten)“ und „Jede Einheit ist zugleich eine Allheit (von Allheiten und/oder Einheiten)“. Der Zahlbegriff wird in diesem Sinne als „logische Einheit und logische Allheit zugleich“ definiert.

1.15.8 Die mathematische Logik diskutiert die Eigenschaften des Zahlbegriffs in der Terminologie der Mengenlehre. „Menge“ ist sprachlich nur ein anderes Wort für den logischen Partikularisationsjunktor. Deshalb ist nach klassisch-logischem Verständnis „Menge“ gleichbedeutend mit „einige“. Wer logisch davon ausgeht, daß „ eine Menge von Dingen bzw. einige Dinge“ weder „alle“, noch „ein“, noch „kein Ding“ bedeuten kann, denkt auch jetzt noch logisch. Um jedoch mathematisch und mathematisch-logisch zu denken, muß man sich darauf einstellen, daß der mathematisch-logische Mengenbegriff die Bedeutung sämtlicher klassisch-logischer Quantifikatoren annehmen kann. Man kennt neben der gewöhnlichen „Menge“ (die weiterhin „einige“ bedeutet) die „Allmenge“, die „Einer-Menge“ (mit nur einem Element als Mengeninhalt), die „leere Menge“ („Null-Menge“ mit keinem Inhalt). Überdies wird der Mengenbegriff „reflexiv“ gebraucht, d. h. mathematische Mengen sollen sich gelegentlich „selbst enthalten“. Dadurch müßte „eine Menge“ zugleich „zwei Mengen“ sein. Solche Reflexivität ist bei regulären logischen Begriffen ausgeschlossen. Man erkennt leicht: Nicht der Mengenbegriff erklärt die Zahl, sondern umgekehrt wird dabei „Menge“ gemäß der Zahl verstanden. Die Analyse des mathematisch-logischen Mengenbegriffs (der selbst als allgemeiner Zahlbegriff gilt) dürfte in einer nunmehr hundertjährigen Arbeit anhand der mit ihm formulierbaren Paradoxien die widersprüchliche Struktur desselben genügend offengelegt haben.

1.15.9 Neben den Zahlen gibt es in der Mathematik eine Reihe von weiteren Begriffen, die ihre Herkunft aus der klassischen Logik nicht verleugnen, obwohl man gewöhnlich nicht darauf geachtet hat. Spricht man von Zahlgrößen, so versteht sich das logisch aus der Erfahrung, daß bei quantifizierbaren Gegenständen „alle Gegenstände“ gewöhnlich größere Haufen bilden als „einige“ oder gar „einer“. Und teilt man „ein“ Stück davon noch in seine Bruchstücke (wie die Zahl Eins in Brüche), dann können sie so winzig werden, daß man sie nicht mehr sieht, und sie also zu verschwinden scheinen. Diese sinnliche Erfahrung dient in der Arithmetiklehre noch als didaktisches Hilfsmittel, aber mehr als man sich eingesteht auch als metaphorisches Modellmaterial für den rein „denkerischen“ Umgang mit den mathematischen Gegenständen. Dann gerät man von beliebigen Zahlgrößen schnell zum „unendlich Großen“ (Infiniten) und „unendlich Kleinen“ (Infinitesimalen) und tut so, als müsse man mit geistigen Fernrohren und Mikroskopen untersuchen, wie es sich mit diesen verhält. Schaut man nun mit dem berühmten „geistigen Auge“ hin (für das es nichts Großes und nichts Kleines, deshalb auch keine „Grenzwerte“ und schon gar kein Unendliches – Apeiron bzw. Infinites – geben kann), so bemerkt man, wie sich auch bei diesen Begriffen die dialektische Kreativität mathematisch bewährt. Das sogenannte Unendlich Große ist und bleibt eine logische Allheit, angewandt auf alle Zahlen. Da Allheit ein logischer Begriff ist, kann er nicht selbst eine Zahl bedeuten. Und in die Arithmetik übernommen soll er beides zugleich sein: Zahl und Nicht-Zahl. (Kreativ weiter entfaltet das die Mächtigkeitslehre von Cantor). Entsprechend ist auch das unendlich Kleine bzw. Infinitesimale, das „unter jede Zahlgröße hinab Kleine“, zwar logische Einheit und deswegen keine Zahl, aber in der Arithmetik soll es ebenso Zahl und Nicht-Zahl zugleich sein. Davon handelt die Infinitesimalmathematik und die Theorie der Non-Standard-Zahlen. Auch das logische „kein“ bleibt in der Arithmetik erhalten. Es wird zur Null, die deshalb ebenfalls sowohl Zahl als auch Nicht-Zahl sein muß. Und auch weiterhin ist bei der Deduktion und Definition weiterer „Einheiten“ in der Arithmetik keine Grenze denkbar. Die Buchstabenrechnung hat logische Begriffszeichen eingeführt, bei denen es nicht mehr zählt, ob sie für Zahlen oder andere Einheiten stehen sollen. Buchstaben als Variable sind in der neuzeitlichen Arithmetik als logische Begriffszeichen eingeführt worden, um genau diesen Unterschied zwischen Zahlen und Begriffen zu dissimulieren.

1.16 Die speziellen Zahlbegriffe werden deduktiv nach dem Muster regulärer dihäretischer Begriffsdefinitionen gewonnen Das gibt aber keineswegs ihre historische Erfindung, Entdeckung oder Konstruktion wieder, wie an ihren oftmals sonderbaren Bezeichnungen zu sehen ist. Aus den dihäretischen Art- und Unterartbegriffen spezieller Zahlen lassen sich dann jeweils wiederum dialektische (widerspruchsvolle) Zahlbegriffe definieren. Hier sei eine dreistufige Pyramide dieser Begriffe angegeben. Der Formalismus der Begriffspyramide wird hier als „semiformale Pyramide“ verwendet. D. h. es werden an Stelle der Buchstaben für Intensionen die sprachlichen Bezeichnungen (Terme) eingesetzt. Diese drücken in der Regel wörtlich nur das jeweilige spezifische Merkmal des Begriffs aus. Im Falle widersprüchlicher Verschmelzung aus dihäretischen Nebenbegriffen ergeben sich je zwei sich gegenseitig negierende spezifische Merkmale. Die generischen Merkmale kann man aus den jeweiligen Oberbegriffen ablesen. Die Deduktion läßt sich in der zahlentheoretischen Forschung bzw. Konstruktionstechnik ad libitum kreativ fortsetzen. Und dies umso effektiver, je mehr sich auch in der Arithmetik die Einsicht durchsetzt, daß ihre begrifflichen Kreationen sich wesentlich deduktiv-konstruktiver Entfaltung der dialektischen Logik verdanken.

Semiformale Begriffspyramide des Zahlbegriffs



1.16.1 Legende: Der logische Quantor wird selbst als logischer ausdrucksbildender Junktor definiert (s. u.). Er ist Oberbegriff für eine dreigliedrige multiple Artenreihe, nämlich des Individualisators („ein" bzw. Einheit), des Partikularisators („einige" bzw. Vielheit oder logische Menge) und des Universalisators („alle" bzw. Allheit). Diese bleiben als logische Junktoren auch im arithmetischen Sprachgebrauch erhalten: Man spricht z. B. von „einer, einigen und/oder allen Zahlen". Für den allgemeinen Zahlbegriff wird das logische „einige" durch den aus der logischen Einheit und der Allheit verschmolzenen Begriff Zahl ersetzt. Dadurch wird auch die arithmetische Einheit zur Zahl Eins, und die arithmetische Allheit zur „infiniten" (unendlichen) Zahl. Jede „natürliche Zahl" ist ein Beispiel für diesen allgemeinen Zahlbegriff und durch ihn definiert. Die natürlichen Zahlen lassen sich einteilen in diejenigen, denen die arithmetische Eins als (logische) Einheit bzw. als spezifische Differenz zugrunde liegt (kommensurable Zahlen), und diejenigen, denen zusätzlich eine andere logische Einheit („nicht-Eins") zugrunde liegt (inkommensurable Zahlen). Beispiele für die ersteren sind die rationalen Zahlen, für letzteres die komplexen Zahlen. Aus beiden verschmolzen ergibt sich der Begriff der Zahlvariablen (Buchstabenzahlen), die gerade diesen Unterschied wieder aufheben bzw. für Rechnungen unerheblich machen. Ein Beispiel ist etwa die Zahl Pi für das inkommensurable Verhältnis der Kreisbögeneinheiten und der zugehörigen Durchmessereinheiten, die geometrisch-anschaulich verschiedene Einheiten für gekrümmte und gerade Linien sind. Die kommensurablen Zahlen (mit der Zahleinheit Eins) lassen sich in positive und negative Zahlen einteilen (und diese jeweils weiter in „ganze" und „rationale" Bruchzahlen, was hier nur angedeutet wird). Die Verschmelzung jeder positiven Zahl mit ihrer negativen Gegenzahl führt zum Begriff der Null (es muß also so viele Nullen geben, als es positive bzw. negative Zahlen gibt. Die Arithmetik verfügt bisher noch nicht über eine Theorie der Nullen, ebenso wenig wie die Ontologie über eine Theorie des Nichts verfügt!). Die inkommensurablen Zahlen lassen sich in die irrationalen und die imaginären Zahlen einteilen. Spezifisches Merkmal der ersteren ist es, daß sie eine auf der arithmetischen Einheit Eins basierende numerische und eine auf der logischen Allheit basierende „infinite" Einheit (die nicht durch Zahlzeichen, sondern ein sprachliches „usw." bzw. Punkte „..." dargestellt wird) im Komplex vereinigen. Die letzteren vereinigen mit arithmetischen Einheiten eine „imaginäre Einheit" („$i = \sqrt{-1}$") im Komplex, die als Ausnahme von der Grundregel der Produktbildung definiert ist. Die Non-Standard-Zahlen (A. Robinson), deren Konstruktion noch keineswegs geklärt scheint, verschmelzen offenbar diese beiden spezifischen Differenzen in ihren inkommensurablen Komplexen, so daß jeder Standardzahl eine infinitesimal-imaginäre Komponente zukommt.

1.16.2 In der Pyramide der Zahlbegriffe sind nicht alle Zahlarten aufgeführt. Wie sich weitere durch Spezifikationen oder Verschmelzungen bilden lassen, ist teils trivial, teils wäre es Gegenstand weiterer Forschungen.

1.16.3 Trivial erscheint die Einteilung der (positiven und negativen) ganzen Zahlen in gerade und ungerade Zahlen. Sie ist es aber wegen der zahlreichen Definitionsmöglichkeiten durch die Rechenjunktoren (Summe, Differenz, Quotient) nicht. Daß sie sich in der dezimalen Zahlreihe beim einfachen (auswendig gelernten) Zählen abwechseln, erscheint nur trivial, wenn man von einer natürlichen Wohlordnung der Zahlen und ggf. ihrer Anordnung im Dezimalsystem ausgeht. Bekanntlich hat sich die Mathematik dafür entschieden, die geraden und ungeraden Zahlen mittels ihrer Teilbarkeiten zu definieren. Es ist zu beachten, daß Euklid bei der Teilbarkeit zwischen Halbierung und anderen Teilungen unterscheidet. Die geraden Zahlen sind (ohne Rest) durch Halbierung teilbar. Die ungeraden Zahlen sind nicht (ohne Rest) durch Halbierungen teilbar.

1.16.4 Gewissermaßen quer zu den geraden und ungeraden Zahlen liegen die Primzahlen. Auch sie werden seit dem Altertum durch die Teilbarkeit definiert. Sie sollen „nur durch sich selbst und die Eins teilbar“ sein, während alle anderen natürlichen Zahlen „auch durch sich selbst und die Eins teilbar“ sind. Insofern stellen sie eine Auswahl aus den geraden und ungeraden Zahlen dar. Auf die Zwei trifft die Definition zu, aber sie ist bisher die einzige gerade Primzahl geblieben, soweit man Zahlen überhaupt auf ihre Teilbarkeiten geprüft hat. Überdies ist ja auch jede größere gerade Zahl halbierbar, und das schließt diese schon deshalb von den Primzahlen aus. Bei der Eins wird grundsätzlich davon ausgegangen, daß sie keine Primzahl sei, obwohl die Definition voll auf sie zutrifft. Diese Unregelmäßigkeiten sind zwar mathematisch erwünscht und geben den Primzahlen (einschließend die Zwei, und die Eins ausschließend) ihre notorische Sonderstellung unter den Zahlen, sie sind aber unlogisch und markieren somit den Unterschied zwischen logischer und traditionell mathematischer Zahlbegriffsbildung. Die logische Definition der Primzahlen muß die Eins einschließen und die Zwei ausschließen. Darüber hinaus muß logisch bei der Teilbarkeit zwischen Halbierung und sonstigen (nicht-halbierenden) Teilungen unterschieden werden. Lautet also die logische Definition der ungeraden Zahlen: „alle nicht-halbierend teilbaren (ganzen) Zahlen“, so lassen sich die ungeraden Zahlen dihäeretisch in die beiden Arten der (ungeraden) Primzahlen und der (ungeraden) Nicht-Primzahlen einteilen und an der entsprechenden Stelle in der Pyramide eintragen.

1.16.5 Die logische Definition der Primzahlen lautet demnach: „Primzahlen = alle ungeraden nur durch sich selbst nicht-halbierend teilbaren (ganzen) Zahlen“. Das schließt die Eins ein und die Zwei aus. Primzahlen bilden also die dihäretische Nebenart der Nicht-Primzahlen, welch letztere „ungerade Zahlen, die nicht nur durch sich selbst nicht-halbierend teilbar“ sind.

1.16.6 Die Primzahlen gelten als unberechenbar bzw. nicht durch einen Algorithmus erzeugbar. Dies liegt aber nur daran, daß man die Eins von ihnen ausnimmt und die Zwei hinzunimmt. Verfährt man nach der hier vorgeschlagenen logischen Definition, daß es sich nämlich um die eine Art der ungeraden Zahlen neben den Nicht-Primzahlen handelt, daß also die Eins hinzugehört und die Zwei nicht, so lassen sie sich sehr wohl berechnen, wie von mir schon in der „Logik“ (1987) vorgeschlagen wurde. Der Algorithmus „ $(2x-1) \cdot (2y-1)$ „ für $x = 1,2,3...$ und $y = 1,2,3...$ erzeugt alle ungeraden Nicht-Primzahlen von der Neun an. Die auf diese Weise nicht erscheinenden ungeraden Zahlen (gewissermaßen die Lücken in der dezimalen Reihe der ungeraden Nicht-Primzahlen) sind ersichtlich die Primzahlen selber, nämlich: 1,3,5,7,-11,13,17...

1.17 Zahlen sind nicht dadurch bekannt und gewußt, daß man ihre Stellung in der dezimalen Darstellungsweise kennt. Um alles über eine Zahl zu wissen, müßte man ihre sämtlichen Definitionen durch Rechenausdrücke kennen und bewußt präsent haben. Für kleinere Primzahlen mag es noch am ehesten gelten, daß man sie genauer kennt, weil sie nicht durch Quotienten und Produkte definiert werden. „Platons Zahl“ (Politeia I,8, 546) war in der Antike wegen ihrer vielfältigen Teilungsmöglichkeiten berühmt; J. F. Fries hat 1823 nachgewiesen, um welche Zahl es sich handelt.

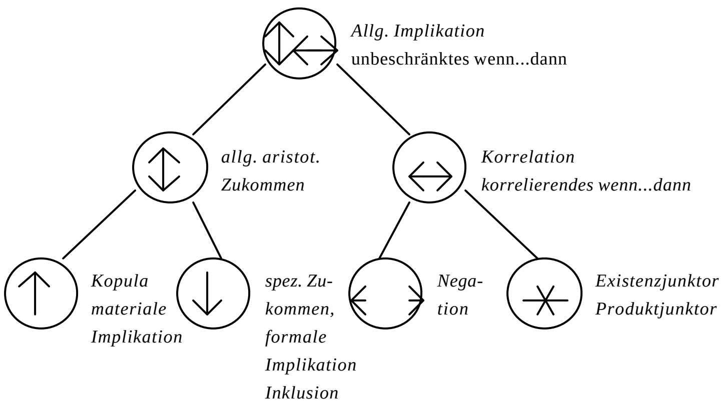
2 Junktoren sind logische Begriffe für die Beschreibung und Lesung der Relationen, die zwischen den Begriffspositionen einer Pyramide bestehen. Dadurch besitzen die Junktoren bestimmte Bedeutungen und Anwendungsbereiche. Die seit Aristoteles herrschende Meinung, Junktoren seien „bedeutungslos“ und erhielten nur eine „Mitbedeutung“ in Ausdrucks- oder Satzverbindungen (Synkategormata bzw. connotationes) ist daher falsch. Es gibt nur vertikale und horizontale Relationen. Sie werden durch die logischen Junktoren in mehrfacher Weise beschrieben. Darauf beruhen Synonymien zwischen einigen Junktoren.

2.1 Von den Junktoren verknüpfen einige die Begriffe nur zu begrifflichen Ausdrücken, die nicht wahrheitswertfähig sind. Wir nennen sie ausdrucksbildende Junktoren. Sie sind bisher in der logischen Forschung zu wenig berücksichtigt worden.

2.1.1 Ausdrucksbildende Junktoren sind das Und (Adjunktor), das ausschließende und nicht-ausschließende Oder (Alternative und Disjunktor), die Quantoren und der Äquivalenzjunktor. Die Negation wird bei sogenannten negativen Begriffen als ausdrucksbildender Junktor gebraucht. Als „bestimmte Negation“ bezeichnet sie einen (positiven) Begriff durch seine negierte (dihäretische) Nebenart („Nicht-Raucher“). Als unbestimmte Negation bezeichnet sie einen (positiven) Begriff einer multiplen Artenreihe durch eine negierte Nebenart („Nicht-Gelb“). Sie bezeichnet damit einen unterbestimmten Begriff.

2.2 Die übrigen Junktoren verknüpfen Begriffe zu wahrheitswertfähigen Urteilen. Wir nennen sie urteils- oder satzbildende Junktoren. Diese sind die Kopula (ist), das allgemeine und das spezielle (aristotelische) Zukommen, die Negation der Kopula (ist nicht) und der Existenzjunktor (es gibt) sowie vier verschiedene Implikationsjunktoren (wenn...dann...). Unter diesen Junktoren sind die folgenden sprachliche Synonyme, die daher logisch äquivalent sind: Kopula = materiale Implikation. Spezielles aristotelisches Zukommen = formale Implikation bzw. Inklusion). Die allgemeine Implikation ist mit sämtlichen Junktoren äquivalent.

Semiformale Begriffspyramide der satzbildenden Junktoren



Die satzbildenden Junktoren sind selbst reguläre logische Begriffe, wie sich an der sie definierenden Begriffspyramide zeigt. Sie verknüpfen pyramidal geordnete reguläre Begriffe in der für sie spezifischen Richtung zu wahren Urteilen, in jeder anderen zu falschen Urteilen.

2.3 Die oberste Gattung der satzbildenden Junktoren ist die allgemeine Implikation. Ihre Bedeutung ist es, die Pyramidenbegriffe in jeder Richtung miteinander zu verknüpfen. (Wenn A dann AB; wenn AB dann A; wenn AB dann AC; wenn AC dann AB). Sie hat den wahren Wahrheitswert der drei untergeordneten Implikationsformen und keinen eigenen Falschheitswert.

2.3.1 Ein uneingeschränkter Gebrauch der allgemeinen Implikation würde jede beliebige Behauptung in der Form eines Wenn-dann-Satzes als wahr erscheinen lassen. Er steht dann aber sofort im Widerspruch zu einem der Falschheitswerte einer der speziellen Implikationen. Deshalb findet er allenfalls dort Anwendung, wo der thematische (pyramidale) Zusammenhang der vorkommenden Begriffe bzw. aussagenlogischer Sätze nicht überschaut werden kann: z. B. „Wenn in Paris ein Schmetterling mit den Flügeln schlägt, dann gibt es in Japan einen Taifun".

2.4 Die beiden dihäretischen Arten (unter der Gattung der allgemeinen Implikation) sind das allgemeine aristotelische „Zukommen", das vertikal in beiden Richtungen verknüpft, sowie die korrelierende Implikation, die in beiden Richtungen horizontal verknüpft.

2.4.1 Das allgemeine „Zukommen" ist also doppeldeutig. Es bedeutet, daß eine Gattung bzw. deren Merkmale als generische Merkmale ihren Arten und Unterarten intensional zukommt; zugleich, daß Arten und Unterarten einer gemeinsamen Gattung extensional zukommen.

2.4.2 Die korrelierende Implikation kann gelesen werden als „wenn das eine, dann das andere" (wenn AB, dann AC, und umgekehrt). Sie dient in inhaltlichen Anwendungen als logische Formalisierung von Korrelationen und insbesondere von Kausalverhältnissen. In einigen stoischen Schlüssen stellt sie (als nichtbehauptende Vermutung) die „indemonstrable" Prämisse für die Kausalschlüsse dar.

2.4.3 Die korrelierende Implikation setzt einen gemeinsamen Oberbegriff der korrelierten Begriffe voraus. In diesem Oberbegriff werden deren gemeinsame (generischen) Merkmale und somit das, was in den korrelierten Begriffen identisch ist, fixiert, während die spezifischen Differenzen deren Unterschiedlichkeit ausdrücken.

2.4.4 Bei der Anwendung der korrelierenden Implikation auf Kausalverknüpfungen („wenn Ursache, dann Wirkung" bzw. „wenn Wirkung, dann Ursache") muß der zeitliche Unterschied (Ursache vorher, Wirkung nachher) der verknüpften inhaltlichen kausalen Glieder in deren spezifischen Differenzen mitausgedrückt werden (Ursache und Wirkung können nicht „gleichzeitig" sein, wie schon Sextus Empiricus betonte). Der gemeinsame Oberbegriff bezeichnet dann eine sich in der Zeit durchhaltende substanzielle Identität zwischen Ursache und Wirkung. Worin diese bestehen könnte, muß die jeweilige ontologischen Theorie angeben, in welcher dieser Junktor benutzt wird.

2.4.5 Dihäretische Unterarten des allgemeinen Zukommens sind das spezielle „Zukommen", welches nur von oben nach unten verknüpft (es wird von Aristoteles am meisten verwendet), sowie die Kopula, welche nur von unten nach oben verknüpft. Die Kopula ist synonym mit der materialen Implikation (der generischen Merkmale in den Unterbegriffen). Das spezielle Zukommen ist synonym mit der formalen (extensionalen) Implikation bzw. der Inklusion (der Unterbegriffe in einem Oberbegriff).

2.4.6 Dihäretische Unterarten der korrelierenden Implikation sind die Negation (der Kopula) und der Existenzjunktor, die horizontal in beiden Richtungen verknüpfen. Die Negation spielt nur zwischen nebengeordneten Begriffen (AB ist nicht AC). Ihr pyramidales Bild ist das Leere zwischen nebenrangigen Begriffen. Der Existenzjunktor hebt als Gegenteil der Negation die Unterscheidung zwischen Nebenbegriffen auf und stellt ihr gemeinsames (generisches) Merkmal als Oberbegriff heraus (Es gibt A). Der Existenzjunktor dient daher zur Einführung allgemeiner Begriffe in den logischen Formalismus.

2.5 Die Negation (der Kopula) ist der Unterscheidungsjunktor von nebenrangigen Begriffen.

2.5.1 Die Negation der Kopula ist nur zwischen dihäretischen Nebenarten einer Begriffspyramide umkehrbar (kommutativ). Zwischen Begriffen einer multiplen Artenreihe oder zwischen beliebigen Begriffen verschiedener Begriffspyramiden ist sie nicht umkehrbar (sie ist hierbei transitiv). Viele logische Schlußfehler beruhen auf der Nichtbeachtung dieses Unterschiedes.

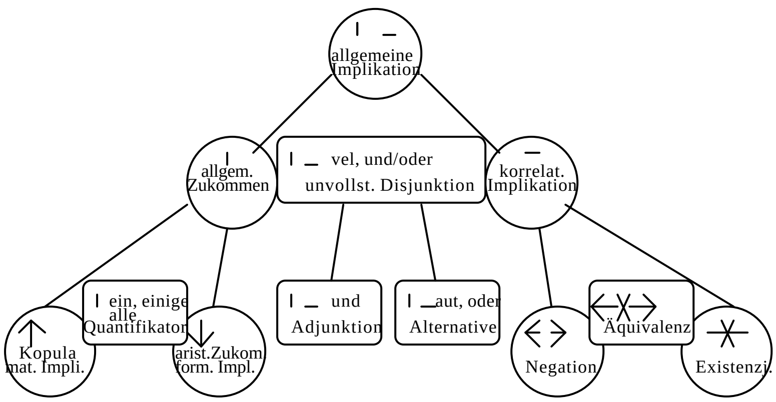
2.5.2 Die Negation der Negation (sog. doppelte Negation) führt daher nur zwischen dihäretischen Artbegriffen auf den Ausgangsbegriff zurück. In allen anderen Anwendungen verweist sie auf alle beliebigen Begriffe außerhalb des Oberbegriffes des Ausgangsbegriffs. Diese Unbestimmtheit macht sich der sogenannte „Vierkant" (catuskoti) des indisch-buddhistischen Logikers Nagarjuna („nicht A" und „nicht nicht-A" und „nicht: A und nicht-A" und „nicht: A oder nicht-A ") für den „Beweis" der sog. „Leerheit" (Shunyata) aller Begriffe zunutze.

2.6 Der Existenzjunktor („es gibt“) bezeichnet die einzelnen Begriffspositionen einer Pyramide unmittelbar bzw. führt deren Bezeichnungen ein. In Anwendung auf inhaltliche Beispiele behauptet er die Existenz eines dem Begriff entsprechenden Gegenstandes. Auch negative Ausdrücke (negative Terme) werden durch den Existenzjunktor eingeführt („Es gibt Nicht-Raucher“). Falschheitswerte von Existenzurteilen ergeben sich, wenn die Existenz einer vorhandenen (formalisierten) Begriffsposition negiert oder eine nicht vorhandene behauptet wird. Die pyramidale Position ist selbst der Gegenstand der logischen Existenzbehauptung.

2.6.1 Der Existenzjunktor wird auch oft mit der Negation verbunden, vor allem in der Gestalt einer Negation der Extension eines Begriffs.(„es gibt keine...“). Sprachlich und inhaltlich geschieht dies meist unter kontextuellen Restriktionen („es gibt *im Winter* kein frisches Gemüse“, wohl aber in anderen Jahreszeiten!). Ohne derartige Restriktionen ergibt sich die Problematik, die als Meinongsches Paradox bezeichnet wird, insofern dadurch zugleich die Existenz und die Nichtexistenz eines Begriffs (und ggf. des damit gemeinten Gegenstandes) behauptet werde. Dieser Fall ergibt sich logisch aber nur bei widersprüchlichen Begriffen. Tatsächlich wird beim negierten Existenzjunktor nur die Extension des widersprüchlichen Begriffs negiert. Der negierte Existenzjunktor drückt dann aus, daß der widersprüchliche Begriff keine eigene Extension besitzt, wie es für alle irregulären (kontradiktorischen und Dispositions-) Begriffe gilt. Diesen wird traditionell keine eigene Extension (und damit kein Gegenstand oder Sachverhalt in der Wirklichkeit) zugesprochen. Freilich muß ein widerspruchsvoller Begriff als solcher erkannt sein, um ihn mittels des negierten Existenzjunktors einzuführen, z. B. „es gibt keine Zombies, d. h. lebende Tote“.

2.7 Ausdrucksbildende Junktoren sind aus je zwei der oben genannten dihäretischen urteilsbildenden Junktoren zu widersprüchlichen Junktorbegriffen verschmolzen. Sie besitzen daher keine eigenen Extensionen, sondern beide Extensionen der in ihnen verschmolzenen Ausgangsjunktoren zugleich. Dadurch heben sich deren Funktionen für die Wahrheitswertbildung gegenseitig auf. Die ausdrucksbildenden Junktoren haben daher keinen Wahrheitswert. Sie lassen sich als widersprüchliche Begriffe (in den Rechtecken) in die Pyramide der satzbildenden Junktoren einschreiben. Die ausdrucksbildenden logischen Junktoren stellen auch die logische Grundlage der mathematischen Rechenjunktoren dar.

Begriffspyramide aller logischen Junktoren



2.8 Die nicht-ausschließende Disjunktion („und/oder“ bzw. „vel“) ist aus dem allgemeinen Zukommen und der korrelierenden Implikation verschmolzen und verknüpft in allen Richtungen. Adjunktion („und“) und Alternative („entweder...oder“) unterscheiden und spezifizieren diese Verknüpfungsweisen. Wie man sieht, sind Adjunktion und Alternative Nebenartbegriffe. Sie definieren sich gegenseitig durch Negation: „Und“ bedeutet „nicht Oder“, und „Oder“ bedeutet „nicht-Und“.

2.9 Die (positiven) Quantoren bzw. Quantifikatoren (ein, einige alle) sind aus der Kopula und dem speziellen Zukommen verschmolzen und verknüpfen vertikal in beiden Richtungen. „Alle“ verknüpft einen Begriff mit sämtlichen in seinem Umfang liegenden Unterbegriffen. „Einige“ verknüpft unbestimmt einen Begriff mit einem seiner Unterbegriffe, drückt aber nicht aus, mit welchem von zweien oder mehreren. „Ein“ verknüpft einen Begriff unbestimmt mit einem seiner Unterbegriffe bzw. mit einem in seinen Umfang fallenden Individuum, drückt aber nicht aus, mit welchem von „allen“, die unter den Begriff fallen. Partikulär und individuell quantifizierte Begriffe sind daher unterbestimmt und bedürfen zur genauen Definition der (durch Äquivalenz bzw. in Gleichungsform) anzugebenden Intensionen.

2.9.1 Das logische „kein“ (negativer Quantor) wird gewöhnlich aus der Negation und dem „ein“ zusammengesetzt („nicht ein“) und so in der Logik verwendet. Genau ist aber gemeint: „noch nicht einmal ein“ bzw. „alle nicht...“. Das „kein“ kommt in den Urteilen der aristotelischen Syllogismen häufig vor (z. B. „kein Tier ist Pflanze“), es läßt sich dort aber durchweg als Negation eines Prädikats verstehen („alle Tiere sind nicht-Pflanzen“). In der mathematischen Logik dient der negative Quantor aber zur Erzeugung von „leeren Begriffen“, d. h. von Begriffen, die zwar eine bestimmte Intension, aber keine Extension („Null-Extension“) haben sollen. Derartige Gebilde sind jedenfalls keine logischen, sondern spezifisch mathematische Begriffe, die auch in die Physik eingebracht werden. Das zeigt sich daran, daß sie mit der sogenannten Meinongschen Paradoxie belastet sind: Was dabei vorgestellt werden soll, gibt es nicht; und wenn es dieses doch geben sollte, kann es nicht vorgestellt werden!

2.10 Die Äquivalenz wird auch als „gegenseitige Implikation“ („genau dann wenn“ bzw. „dann und nur dann, wenn“) beschrieben. Das kann sich logisch aber nur auf das generischen Merkmal beziehen, welches vom generischen Merkmal der korrelierenden Implikation her auch im Äquivalenzjunktor enthalten ist. Die implikative Ausdrucksweise ist aber insofern irreführend, als damit der Anschein erweckt wird, es handele sich bei Äquivalenzen um zwei verschiedene nebenrangige Begriffe. Das ist jedoch keineswegs der Fall. Denn zusätzlich zum generischen Merkmal der (horizontalen kommutativen) Implikation weist der Äquivalenzjunktor zugleich die sich ausschließenden spezifischen Merkmale der Negation und des Existenzjunktors auf. Dadurch neutralisieren sich deren Wahrheitswerte in der Äquivalenz. Die Negation besagt, daß beide Seiten des Äquivalenten nicht dasselbe sind und insofern unterscheidbar sein müssen. Der Existenzjunktor führt aber beide unterschiedenen Seiten als „einen Begriff“ in den logischen Kontext der Formalismus ein. Genau dies geschieht bei der Definition eines unterbestimmten Begriffes durch einen genau bestimmten (und umgekehrt).

2.10.1 Die Äquivalenz ist also ein ausdrucksbildender Junktor und deshalb nicht wahrheitswertfähig.

2.10.2 Seit Leibniz ist es üblich, alle Urteile mit demselben Wahrheitswert für äquivalent zu halten. Leibniz meinte, alle wahren Sätze ließen sich deshalb „salva veritate“ in logischen Formalismen untereinander austauschen. Man sieht jedoch nicht, worin diese Äquivalenz zwischen unterscheidbaren und somit verschiedenen wahren (und entsprechend auch falschen) Urteilen liegen könnte. Daß sie das gemeinsame Merkmal, wahr (oder falsch) zu sein, haben, macht sie ebenso wenig äquivalent wie jedes andere gemeinsame Merkmal. Die Leibnizsche Meinung und ihre verbreitete Anwendung in Formalismen ist schon deswegen falsch und irreführend, weil „wahrer Satz“ bzw. „falscher Satz“ im Formalismus keine Sätze, sondern spezifizierte Ausdrücke sind, die selber keinen Wahrheitswert besitzen können. Formuliert man aber „wahrer Satz g.d.w.(=) wahrer Satz“, so hat man keine Äquivalenz, sondern eine Identität der Glieder (durch Wiederholung desselben Ausdrucks) formuliert. Dieser Fehler kommt freilich in den üblichen Logiken und in der Mathematik sehr häufig vor. Ausdrücke nach dem Schema „x = x“ stellen jedoch ebenfalls keine Äquivalenz dar, sondern sind eine mißbräuchliche Verwendung des Äquivalenzjunktors für die Darstellung einer Identität, die man üblicherweise auch „Tautologie“ nennt. Wittgenstein hielt auf Grund der Meinung von Leibniz (die durch G. Frege geradezu dogmatisiert wurde) solche „Tautologien“ für das wesentliche Charakteristikum aller formalen Logik und identifizierte sie mit der Gleichung bzw. der Äquivalenz. Echte Äquivalenzen zwischen Urteilen mit demselben Wahrheitswert ergeben sich allenfalls dann, wenn sie denselben Satzsinn zum Ausdruck bringen (z. B. „alle Tiere sind Lebewesen = Lebewesensein kommt allen Tieren zu“).

2.10.3 Die Äquivalenz drückt Synonymien zwischen Begriffen und Termini aus. Äquivalenzen sind logische Ausdrücke ohne Wahrheitswerte. Sie dienen als Definitionen, die „frei setzbar“ sind.

2.10.4 Lexika und Wörterbücher definieren Begriffe mittels äquivalenter Umschreibungen. Wären Äquivalenzen wahre Urteile, so wären es auch alle Einträge in (guten) Lexika und Wörterbüchern. Wer sich auf die exemplarische mathematische „Wahrheit“ „Zwei-mal-Zwei = Vier“ berufen wollte, der könnte sich mit demselben Recht auf die exemplarische philologische „Wahrheit“ „Armut = pauvreté“ berufen.

2.10.5 Negierte Äquivalenzen, z. B. in etymologischen Wörterbüchern (in denen Wörtern mit aktueller Bedeutung Wörter mit davon verschiedener historischer Bedeutung zugeordnet werden) können daher ebenfalls keinen Wahrheitswert besitzen.

2.11 Mathematische Rechenarten außer der Multiplikation (Produktbildung) sind, logisch gesehen, ausdrucksbildende Junktoren. Sie sind z. T. mit diesen synonym, z. T. lassen sie sich auf diese zurückführen. Die Multiplikation ist kein Junktor, sondern eine Begriffsverschmelzung.

2.12 Der mathematische Hauptjunktor ist die Gleichung. Sie ist unbestritten eine Äquivalenz zwischen dem, was links und rechts vom Gleichheitszeichen steht. Logisch kann daher die Gleichung keinen Wahrheitswert besitzen. Gleichwohl gilt sie in der Mathematik als wahrheitswertfähiges Urteil (vgl. Kants „apriorisch-synthetisches Urteil: 5 + 7 = 12“ und Freges „wahre analytische Funktion“: z. B. „ 5 + 7 = 8 + 4“). Da elementare arithmetische Äquivalenzen jahrhundertelang durch das kleine und große Einmal-Eins auswendig gelernt wurden und außerdem das „ist gleich“ gewöhnlich mit der Kopula verwechselt oder identifiziert wird, wuchs ihnen im Sprachschatz eine Selbstverständlichkeit als vermeintlicher Wahrheiten zu.

2.12.1 Ungleichungen sind logisch negierte Gleichungen. Auch sie haben daher keinen Wahrheitswert.

2.12.2 Ebenso wenig besitzt die spezifisch mathematische Relation „kleiner/gleich/größer“ (≤ / ≥) einen Wahrheitswert. Sie ist logisch synonym mit dem nichtausschließenden Disjunktor (...oder...oder...oder... bzw. ...und/oder...und/oder...und/oder...). Sie vereint die Gleichung mit der Ungleichung in einem Ausdruck.

2.12.3 Wären Gleichungen und Ungleichungen wahre oder falsche Behauptungen, so müßte es in der Mathematik auch wahr-falsche bzw. widersprüchliche Gleichungen und Ungleichungen geben.

2.13 Rechenaufgaben als Gleichungen definieren einen oder mehrere Zahlwerte, und umgekehrt definieren Zahlen Rechenausdrücke. Schulmäßiges Rechnen und Auswendiglernen des „Einmaleins“ ist eine Memorierung einiger dieser Definitionen und ihrer Bildungsweisen.

2.14 Darüber hinaus definieren bestimmte Rechenausdrücke spezielle Zahlbegriffe (wie z. B. die Subtraktion über die Null hinaus die negativen Zahlen, die fortgesetzten Teilungen mit immer wieder sich ergebenden Resten die Irrationalzahlen, das Wurzelziehen aus negativen Zahlen die imaginären Zahlen).

2.14.1 Die Summe ist eine auf gleichrangige Nebenarten eingeschränkte Adjunktion. Die Differenz ist (im positiven Bereich) eine Adjunktion mit einem negierten Glied („und nicht“). Produkte werden nicht durch Junktoren gebildet, sondern sie sind spezifizierte Größen, z. B. 3×2 = „verdoppelte Drei“ (oder „verdreifachte Zwei“).

2.15 Die übrigen Rechenarten definieren Begriffe oder Ausdrücke als erweiterte Zahlbegriffe und metrische Begriffe (bes. der Geometrie und der Physik).

2.15.1 Nulldifferenzen bilden den „leeren Begriff“ („x und nicht x“) und definieren ihn als Null (z. B. 3 – 3 = 0). In der analytischen Geometrie, in welcher geometrische Verhältnisse (z. B. Kurven im dreidimensionalen Raum) arithmetisch definiert werden, stellt jede Koordinate (x, y-, z-Achse) ein besonderes Kontinuum positiver und negativer Zahlen mit einer Nullstelle dar. Die drei Raumdimensionen schneiden sich in einem gemeinsamen Nullpunkt in rechten Winkeln zueinander. Zugleich aber stellt jede Achse zugleich ein Kontinuum von Nullwerten der übrigen beiden Koordinaten dar. Durch dieses von Descartes erfundene Darstellungsverfahren von Zahlen wird die Null somit als „eine (gemeinsame) Null“ der drei Zahlenkontinua wie auch als unendlich viele Nullstellen auf jeweils einer Achse bezüglich der beiden anderen Achsen definiert. Dadurch wird die Null in Funktionsgleichungen auch durch positive und negative Zahlen definierbar. In der Fläche z. B. gelten die Schnittpunkte von Kurven mit der x-Achse (d. h. y = 0) als „Lösungen“ der Funktionsgleichung (y = f(x)) der Kurve. Die Anwendung des Verfahrens auf physikalische Meßwerte von Größen erlaubt es entsprechend, Nullwerte von Größen mit positiven oder negativen Meßgrößen gleichzusetzen, d. h. sie als äquivalent mit diesen zu definieren.

2.15.2 Differenzen im negativen Bereich bilden „negative Zahlen" (logisch: negierte Zahlen, die zugleich Zahlen sind!). Die Anwendung auf physikalische Begriffe führt zu negativen Begriffen (vgl. etwa Minusgrade in Temperaturskalen, positive und negative Kräfte). Das Eindringen dieser Begriffbildung im „mathematisierten" Vokabular der Alltagssprache hat im Bankwesen seinen plausiblen Prototyp: Soll und Haben (Schulden und Guthaben) sind negative und positive Begriffe von Geldwerten (die „roten Zahlen" des Kreditnehmers sind zugleich „schwarze Zahlen" der Bank, und umgekehrt). In der Ökonomie spricht man mittlerweile vom „negativen Wachstum" und meint damit „positiven Niedergang".

2.15.3 Potenzen verschmelzen Zahlbegriffe (bzw. Begriffe) mit sich selbst und definieren durch diese spezielle Produktbildung (mit gleichen Ausgangsbegriffen) Zahlwerte bzw. andere Begriffe. Das Verfahren wird zwar seit der Antike durch geometrische Quadrate und Kuben mit „gleichen Kantenlängen" plausibilisiert. Jedoch wird dabei außer acht gelassen, daß diese räumlichen Kanten (vektoriell) verschiedene Richtungen haben und deshalb verschiedene Faktoren sind, was der Voraussetzung widerspricht. Überdies werden alle Einerpotenzen als Eins definiert, während geometrische Quadrat-Flächen oder Kuben mit der Kantenlänge der Einheit durchaus von der Einheitslänge verschieden sind. Höhere als dritte Potenzen (in den sogenannten Minkowski-Räumen) lassen sich in der analytischen Geometrie nach Belieben formulieren. Was man sich dabei als 4., 5. oder n-te Potenz vorzustellen hat, wird aber nur als analoges Verfahren zum Hinzufügen einer (euklidisch) räumlichen zur Quadratpotenz erläutert. Physikalische Potenzbegriffe „veranschaulicht" sich der Physiker mittels dieser Geometrisierung nur modellhaft. Indem er nur noch formal damit rechnet, kann er prinzipiell auf jede Anschauung verzichten, und er kann die „Unanschaulichkeit" dieser physikalischen Begriffe als deren Besonderheit und Vorzug gegenüber nicht-physikalischen Begriffen hinstellen. Und dennoch gibt es derartige Potenzbegriffe als „Reflexionsbegriffe" auch in anderen Wissenschaften und in der Philosophie, wenn sie auch kaum hinsichtlich ihrer Struktur durchschaut werden. Auch für sie gilt die dialektische Verdoppelung bzw. Vervielfachung und zugleich Beibehaltung der Einheit. Diese Kriterien dürften etwa auf „Selbstbewußtsein" zutreffen, das als „Bewußtsein des Bewußtseins" bzw. „Denken des Denkens" (die aristotelische Noesis noeseos) zugleich eines und zweierlei mit sich Verschmolzenes bedeuten soll.

2.15.4 Quotienten sind zweideutig und haben daher eine doppelte Funktion. Als Proportion von Größen (einige : einige) stellen sie (kommutative) nicht ausrechenbare Ausdrücke dar (z. B. Torverhältnis beim Fußballspiel). Als Rechenausdrücke für Teilungsaufgaben definieren sie nur einen sich bei einer durchgeführten Teilung ergebenden Teil; sie sind daher nicht-kommutativ (z. B. Wegstrecke/Zeitstrecke = Geschwindigkeit). Bei „nicht aufgehenden" Teilungen, bei denen sich auch die fortgesetzte Teilung der sich ergebenden „Reste" nicht mit endlicher Ziffernfolge darstellen läßt, definiert dieser Quotient die spezielle Zahlart der Irrationalzahlen (z. B. Pi (π) = Halbkreis : Kreisdurchmesser). Die sogenannten Stammbrüche (1 / 2; 1/ 3, usw.) sind selbst schon Ausdrücke der Gemeinsprache (eine Hälfte, ein Drittel, usw.) und daher keine Rechenaufgaben. In der Gleichungsdarstellung (1 / 2 = 0,5) handelt es sich nur um eine Äquivalenz zwischen der Quotienten- und der Dezimaldarstellung des Ausdrucks.

2.15.5 Differentialquotienten sind Proportionen von infinitesimalen, d. h. zahlenmäßig nicht erfaßbaren „Größen". Ihre Bedeutung wird gewöhnlich noch immer wie bei ihrer Erfindung durch Leibniz durch zahlenmäßige Proportionen von Kathedenlängen rechwinkliger Dreiecke (deren Hpothenuse als Sekante möglichst nahe an ein kurzes Stück eines Kurvenverlaufs angeschmiegt ist), verdeutlicht. Der Differentialquotient definiert dann die sog. Steigung dieser Kurve an einem Punkt, in welchem die Dreieckskatheden sowie die Hypothenuse unter jede zahlenmäßige Bestimmbarkeit zusammenrücken sollen. Die Widersprüchlichkeit des Differentialquotienten zeigt sich geometrisch darin, daß im als „ausdehnungslos" definierten Punkt gleichwohl infinitesimale Ausdehnungen (auf der x- und y-Achse der cartesianischen Fläche) angenommen werden. Sie bleibt auch in der rein arithmetischen Verwendung des Differentialquotienten erhalten, bei der nämlich x und y als Variablen für gleichermaßen zahlenmäßige wie infinitesimale „Größen" stehen. Die übliche Erklärung, daß die infinitesimalen „Größen" dabei der Null beliebig nahe kommen könnten, ohne sie jedoch zu erreichen, dient dazu, den logischen Widerspruch zu dissimulieren, daß sie „zugleich Null und verschieden von Null" sind.

2.15.6 Integrale summieren nicht-summierbare Summen aus Zahlgrößen und infinitesimalen Nichtzahlen zu Zahlen. Da es somit auch kein Rechenverfahren für die Definition von Integralen gibt, werden ihre Zahlenwerte anhand der Summen „exhaurierter“ (empirisch gewonnener) Meßgrößen definiert und in Tabellen fixiert.

2.16 Funktionsgleichungen („Funktionen“) sind Äquivalenzen von Rechenausdrücken. mit Variablen (sogenannten Unbekannten). Die übliche formale Notierung „y = f (x)“ besagt logisch, daß der allgemeine Begriff bzw. Zahlenwert y dasselbe bedeutet wie sein durch f (eine spezifische Differenz) quantifizierter Oberbegriff x. Z. B. „Quadrat = gleichseitig-rechtwinkliges Viereck“, oder „Junggeselle = nicht-verheirateter Mann”. Deswegen werden sie überhaupt Gleichungen genannt. Sie sind als arithmetische Definitionen von geometrischen Gebilden, nämlich von Linien als Punktreihen in der Fläche entwickelt worden. In Fregescher Terminologie kann man sagen: Der Sinn eines (evtl. quantifizierten bzw spezifizierten) X-Wertes und der Sinn eines (ebenfalls quantifizierten bzw. spezifizierten) Y-Wertes haben die gemeinsame Bedeutung eines Punktes in der cartesianischen Fläche. Die Einsetzung von Zahlenwerten in die Variablenstellen X und Y definiert dann die Linie als Punktreihe. Sieht man von dieser geometrischen Anwendung ab, so verlieren die Funktionen mit ihrer geometrischen Bedeutung ihren Gleichungscharakter und werden zu korrelierenden Behauptungssätzen. X und Y erhalten dann rein arithmetische Bedeutungen, die in der Regel verschiedene Zahlwerte darstellen und deshalb keineswegs „gleichgesetzt“ werden können. Daß sie dennoch als Gleichungen notiert werden, verdankt sich ausschließlich der mathematischen Gewohnheit, Gleichungen als Behauptungssätze aufzufassen.

2.17 Mathematische Quantoren sind bezüglich von Einheiten synonym mit dem logischen „ein“. Dies gilt auch vom sogenannten Infinitesimalen (unendlich Kleines), welches eine (evtl. auch verschiedene) nicht-zahlenmäßige Einheit(en) darstellt. Bezüglich bestimmter Zahlenwerte („größer als Eins“) sind die mathematischen Quantoren Spreizungen (Spezifikationen) des logischen „einige“. Bezüglich des Infiniten („unendlich Großes“) mathematischer Bestimmungen sind sie synonym mit dem logischen „alle“.

2.17.1 Daß die Mathematik logische und mathematische Junktoren nebeneinander verwendet, ersieht man aus mathematischen Texten. Hier ist zwanglos von „einer“, „einigen“ oder „allen“ oder „keinen“ Zahlen und anderen mathematischen Gebilden die Rede.

2.18 „Wahrscheinlich“ bzw. „möglicherweise“ verdienen es, als Junktoren in die Logik eingeführt zu werden. Sie spielen faktisch eine bedeutende Rolle in den Urteils- und Schlußlehren. Allerdings werden ihr Sinn und ihre Funktion verkannt, weil man sowohl in der klassischen wie in der mathematischen Logik davon ausgeht, daß auch Vermutungen und Prognosen nur in der Form eindeutig behauptender Urteile artikuliert werden könnten (die Logik spricht nicht im grammatischen Konjunktiv!). Werden „wahrscheinlich“ oder „möglicherweise“ satzbildenden Junktoren beigefügt, so modifizieren sie den Behauptungssinn des entsprechenden Urteils, indem sie ihm die Negation hinzufügen. Man sagt „...ist wahrscheinlich...“ und meint zugleich: „...oder ist wahrscheinlich nicht...“; oder: „es gibt wahrscheinlich...“, was zugleich bedeutet: „oder es gibt wahrscheinlich nicht....“.

2.18.1 Auch die Verwendung der Implikationsjunktoren zwingt den Logiker, Vermutungen in strikte Behauptungsformen zu kleiden. Dadurch werden auch grammatikalische Konjunktive (Irrealis, Konditionalis) als indikativische Behauptungssätze formalisiert. Die Logik hätte sich mancherlei Irrtümer und Irrwege erspart, wenn sie nicht Aristoteles gefolgt wäre und mit ihm sprachliche Konjunktivpartikel der Gemeinsprache wie „falls ...wäre, so wäre...“ als behauptende Implikation „wenn...ist, dann ist...“ formalisiert hätte. Die Stoiker haben diesen Fehler jedenfalls vermieden.

3 Definitionen sind Äquivalenzausdrücke. Sie sind keine wahrheitswertfähigen Urteile, wie sonst allgemein in der Logik angenommen wird. Bei dieser falschen Annahme wird der Äquivalenzjunktor mit der Kopula verwechselt. Seine zutreffende Lesung ist jedoch das mathematische „ist gleich“, das man gemeinsprachlich auch als „das heißt“ oder „beziehungsweise“ ausdrücken kann. Was G. Frege von den Gleichungen sagt, gilt grundsätzlich für die Definition, daß sie nämlich „verschiedenen Sinn derselben

Bedeutung“ ausdrücken. Sie erläutern unterdeterminierte Begriffe durch (mehr oder weniger vollständig determinierte) „synonyme“ Begriffe oder Ausdrücke, und umgekehrt. Auch Frege verwechselte die nicht wahrheitswertfähige mathematische Gleichung mit dem wahrheitswertfähigen logischen Urteil.

3.1 In den logischen Formalisierungen von Definitionen müssen die formalen Zeichen links und rechts vom Äquivalenzjunktor bzw. Gleichheitszeichen verschieden sein. Sie vertreten bzw. stehen für (supponieren) synonyme Begriffe oder Ausdrücke, die eine identische Bedeutung besitzen. G. Frege drückte es zwar richtig, aber hermeneutisch ungeschickt so aus, daß dadurch „verschiedener Sinn mit gleicher Bedeutung“ ausgedrückt werde.

3.1.1 Die Fregesche Definition der Definition ist deshalb hermeneutisch ungeschickt, weil Frege die Zeichen mit ihrem Sinn identifizierte und sie gemeinsam von ihrer Bedeutung unterschied. Hermeneutisch genau ist zu sagen, daß die Zeichen eine doppelte Bedeutung erhalten. Die eine (Freges „Sinn“) ist je nach dem Formalismus der Lautwert von Buchstaben, der Zahlenwert von Zahlzeichen, die Bedeutung vorkommender Junktoren (auch der Rechenjunktoren), das Bild, das durch einen Graphen dargestellt wird. Die andere ist die eigentliche logische bzw. mathematische (Freges „Bedeutung“) Bedeutung. An deren Stelle tritt im Anwendungsfall des Formalismus auf Sachverhalte die (sprachliche) Bedeutung der Begriffe und Ausdrücke. Man kann auch nach hermeneutischem Brauch sagen: Die logischen Zeichen verweisen einerseits auf einen vordergründigen Literalsinn und einen disziplinären Hintersinn.

3.1.2 Stehen alphabetische Buchstaben für ganze Begriffe (wie im aristotelischen Formalismus), so ist „A = B“ eine reguläre Formulierung einer (gegenseitigen) Definition synonymer Begriffe. Dasselbe gilt für „A = Nicht-B“ (z. B. Tier = Nicht-Pflanze). Die Formel „A = A“ (Wittgensteins Urtyp der Tautologie) läßt sich nur dann als Definition ansehen, wenn man die beiden A als numerisch verschiedene Zeichen versteht. Der Sachverhalt würde also besser mit Indices „$A_1 = A_2$ “ notiert. Die Gleichung definiert dann den für den aristotelischen Formalismus und für die mathematischen Gleichungen grundlegenden Sachverhalt, daß die bloß numerisch verschiedenen und bloß numerisch unterscheidbaren Begriffszeichen in einem thematischen Kontext stets in derselben Bedeutung verstanden werden müssen.

3.1.3 Geschieht das nicht, wie es oftmals in Lehrbüchern der Fall ist (wo die Formel als „Satz der Identität“ vorgeführt wird), so ist die Formel „A = A“ weder eine Äquivalenz noch eine Definition. Steht ein und dasselbe Zeichen A (um mit Frege zu sprechen) für verschiedenen Sinn und zugleich für die einheitliche Bedeutung des verschiedenen Sinnes, so erweist sich die Formel als formales Paradox: In der Form der Gleichung bzw. als Definition „A = A“ müssen (hermeneutisch) drei verschiedene Bedeutungen des Zeichens A unterschieden werden, die zugleich nur eine einzige Bedeutung des Zeichens A sein können. In diesem formalen Paradox der Gleichung liegt eine der Einbruchstellen für die Dialektik der mathematischen Notationsweisen.

3.2 Die aristotelische Standarddefinition umschreibt einen Artbegriff durch explizite Angabe seiner generischen Intensionen mittels des „nächsthöheren“ Begriffs (Gattung) und durch die „spezifische Differenz“ (Intension), die ihn von der Gattung und seinen Nebenarten unterscheiden. Sie kennzeichnet einen Begriff „deutlich“ durch seine Merkmale und grenzt ihn „klar“ von Ober- und Nebenbegriffen ab

3.2.1 Die aristotelische Standarddefinition ist in der Regel unvollständig. Sie gibt als generisches Merkmal eines definierten Artbegriffes nur die spezifische Differenz des „nächsthöheren“ Gattungsbegriffes (genus proximum) an und läßt dessen eigene generische Merkmale außer acht. Um vollständig zu sein, müßte sie auch alle generischen Merkmale aller höheren Begriffe über einem definierten Begriff bis zum axiomatischen Grundbegriff angeben.

3.3 Sogenannte axiomatische Grundbegriff (höchste Gattungen, Kategorien) müssen, wenn sie überhaupt Begriffe sein sollen, definierbar sein. Nach der aristotelischen Standarddefinition sind solche „höchsten“ Gattungen nicht definierbar. Da sie jedoch („univoce“ wie Duns Scotus richtig sah) das gemeinsame Merkmal ihrer Art- und Unterartbegriffe enthalten, sind sie auf andere Weise definierbar.

3.3.1 Bei vorhandenen Termini gibt die Bezeichnung des Grundbegriffs selbst schon dieses einzige Merkmal an. Vgl. die Definition von „Sein“ bei Duns Scotus als das gemeinsame Merkmal aller Kategorien, die in der Extension des Seinsbegriffs liegen.

3.4 Falls solche Grundbegriffe kontradiktorische Begriffe sind, enthalten sie nur die sich ausschließenden Merkmale zweier dihäretischer Allgemeinbegriffe (vgl. „Möglichkeit = Sein-Nichts“ bzw. „Nichts-Sein“).

3.4.1 Die von Thomas von Aquin dem aristotelischen Diktum „To on pollachos legethai“ (Das Sein wird – je nach Kategorie – verschieden ausgesprochen) gegebene Interpretation enthält die Behauptung, daß das Merkmal des Seinsbegriffs in den Kategorien zugleich identisch enthalten wie auch davon verschieden sei. Diese sogenannte Analogietheorie des Seins (Analogie = Identität und zugleich Verschiedenheit) definiert den Seinsbegriff als einen widersprüchlichen Begriff, während ihn die Univozitätstheorie des Duns Scotus als regulären Grundbegriff definiert.

3.5 Die sogenannten partikulären Urteile sind Definitionen, keine wahrheitswertfähigen Urteile. Sie drücken die Äquivalenz zwischen einem extensional unterbestimmten Begriff und einem Begriff aus.

3.5.1 Die partikulären Definitionen geben mindestens zwei Bedeutungen für das Explanandum „einige A“ an, je nachdem ob der zu definierende Begriff in einer vollständigen Disjunktion oder in einer multiplen Artenreihe steht (dihäretisch z. B.: „Einige Lebewesen = Tiere“ / „einige Lebewesen = Pflanzen“. Bei multipler Artenreihe: „Einige Tiere = Hunde / einige Tiere = Katzen / einige Tiere = Papageien“ usw.).

3.5.2 Daß die partikulären Definitionen fälschlicherweise als Urteile gelten, erkennt man u. a. daran, daß durch ihre Negation die positiven Explanantia bloß negativ benannt werden („Einige Lebewesen = Nicht-Tiere“ / „einige Lebewesen = Nicht-Pflanzen“). Deshalb entstehen dabei auch keine falschen Urteile, sondern Begriffsdefinitionen durch Negationen.

3.5.3 Man erkennt es auch daran, daß mit ihnen auch vergangene und zukünftige Sachverhalte, d. h. Gegenstände der historischen Forschung, der Protokolle und der Prognosen definiert werden.

3.6 Die sogenannten singulären Urteile sind ebenfalls nicht-wahrheitswertfähige Definitionen. Sie drücken die Äquivalenz zwischen einem Begriff und seiner Umschreibung durch die generischen Merkmale und eine singuläre Extension seiner Gattung aus („Mensch = ein vernünftiges Lebewesen“). Auch durch sie werden neben gegenwärtigen auch historische und prognostizierte Sachverhalte definiert. Z. B. „Sokrates = ein athenischer Philosoph“. Behaupten zu wollen, wie es bei logisch ungenauem Sprachgebrauch und unter Verwechslung der Definition mit einer wahrheitswertfähigen Behauptung, evt. auch im sogenannten historischen Präsens, häufig geschieht: „Sokrates ist ein athenischer Philosoph“ wäre eine glatte Lüge, denn jeder weiß, daß Sokrates nicht mehr existiert.

3.7 Mathematische Gleichungen und geometrische Funktionen sind ebenfalls Definitionen. Sie drücken Äquivalenzen zwischen einer Zahl und deren Umschreibung durch Rechenausdrücke bzw. zwischen Rechenausdrücken mit Variablen aus. In der cartesianischen Fläche definieren geometrische Funktionsgleichungen Punktreihen als Linien.

3.7.1 Logisch betrachtet sind die Zahlen inhaltliche Bedeutungen, die durch Ziffern (und ggf. durch weitere mathematische Symbole) als Zeichen bezeichnet werden. Die Ziffern als Zahlzeichen bezeichnen insofern keine logischen, sondern disziplinär mathematische Sachverhalte. Die Verwendung von Buchstaben in der neuzeitlichen Mathematik bedeutete zunächst die Anwendung des aristotelischen Begriffsformalismus auf die arithmetischen Gegenstände. So konnte eine Zahl als Gegenstand durch das Begriffszeichen A logisch formal vertreten werden. Die Gleichung „A = 2“ definierte den Sachverhalt, daß A logisch für die Zahl 2 stehen und sie formal vertreten soll, bzw. daß das logische Begriffszeichen A dieselbe Bedeutung wie das mathematische Ziffernzeichen 2 haben soll.

3.7.2 Die Verwendung der Buchstaben als Variable erweiterte den Gegenstandsbereich der Mathematik. Sie bedeutete keineswegs eine logische Verallgemeinerung bzw. Logifizierung der mathematischen Gebilde. Dem trug man dadurch Rechnung, daß man die „Buchstabenzahlen“ mit kleinen alphabetischen Zeichen notierte, also a,b,c,...m,n,o,...x,y,z. „a“ als Variable bedeutete nicht mehr einen logischen Begriff von Zahl oder Zahlen, sondern eine unbestimmte oder bestimmte Menge von Zahlen. Die (cartesischen) Variablen x und y (und evtl. z) bedeuteten ebenfalls einen mathematischen Gegenstand, nämlich eine oder mehrere „unbekannte Zahl(en), welche Punkte auf den cartesianischen geometrischen Koordinaten bezeichnen“. Die sogenannten Konstanten wurden als Buchstabenzeichen für bestimmte Zahlen oder was man dafür hielt, eingeführt, z. B. Pi (π für das Verhältnis von Kreisumfang zum Kreisdurchmesser) oder ∞ (für die unendlich große Zahl). In all diesen Erweiterungen blieben die Buchstabenzeichen innermathematische Zahlzeichen. Um mit ihnen umzugehen, mußten und konnten ihre Bedeutungen durch Gleichungen definiert werden.

3.7.3 Die traditionelle quadriviale Anwendung der Arithmetik für die Quantifizierung geometrischer und physikalischer Gebilde verschaffte den Variablen und Konstanten als mathematischen Zeichen eine zusätzliche Bedeutungsebene. Sie wurden zugleich als logische Begriffszeichen für geometrische und physikalische Entitäten verwendet und durch Zahlen selbst quantifiziert. Diese Doppelbedeutungen der Variablen und Konstanten wurden zu einer weiteren Einbruchstelle für die Übertragung der mathematischen Dialektik auf Geometrie und Physik.

3.7.4 Die einfachste Gestalt der mathematischen Gleichungsdialektik ist die Tautologie. Wittgenstein hielt sie fälschlicherweise für das Wesen des Logischen (Tractatus 6.1). Sie macht die formale Paradoxie des sog. Satzes der Identität in der Mathematik kanonisch. Diese läßt sich mehrfach auslegen. Bedeutet in der Gleichung „x = x" das x „nichts" (nach Hilbert, bei dem x erst durch die Zuschreibung eines Zahlenwertes oder Begriffes „etwas" bedeutet), so ist x im Formalismus ein Zeichen und zugleich kein Zeichen. Bedeutet x „sich selbst" (scholastische materiale Supposition des Zeichens), so kann x überhaupt kein Zeichen sein, weil Zeichen grundsätzlich auf etwas anderes verweisen als auf sich selbst.

3.7.5 Was man technisch „Auflösung" oder „Lösung" einer Rechenaufgabe in der Form einer Gleichung nennt, dürfte nicht mehr als Gleichung, sondern es müßte als Bedeutung der Gleichung, mithin als einfacher Zahlenwert notiert werden.

3.7.6 Geometrische Funktionsgleichung können überhaupt keine „Lösungen" besitzen. Was man so nennt, sind keine Bedeutungen der Variablen, sondern die Bedeutung(en) jeweils einer der beteiligten Variablen beim Nullwert der übrigen. Und dies setzt eine Bezugnahme der definierten „Lösungen" auf die cartesianische geometrische Veranschaulichung der drei Zahlengeraden im dreidimensionalen Raum voraus.

3.7.7 Die cartesianische analytische Geometrie definiert in geometrischer Veranschaulichung drei verschiedene Zahlarten (auf den in rechten Winkeln zueinander stehenden Koordinaten), die nur im gemeinsamen Schnittpunkt die Null als gemeinsame Zahl besitzen sollen. X, Y und Z müßten daher eigentlich als Indices dieser verschiedenen Zahlarten stehen. Jeder Punkt im cartesischen Raum kann so durch Angabe des Zahlenwertes seines Abstandes vom gemeinsamen Nullpunkt auf den drei „Zahlachsen" durch ein Zahltripel definiert werden: P = X,Y,Z. Nach mathematischem Usus können die einfachen Zahlwerte wiederum quantifiziert (logisch: spezifiziert) werden, z. B. P = 1/2X, 3Y, Z^2. Auch dadurch werden also bestimmte Raumpunkte definiert.

3.7.8 Logisch an den geometrischen Funktionsgleichungen ist, daß z. B. für jeden Punkt einer Linie in der Fläche einem X-Wert ein Y-Wert und umgekehrt zugeordnet wird. Und dafür steht als einleuchtendes Beispiel die Funktion X = Y. Werden Funktionsgleichungen rein arithmetisch (also ohne Bezug auf geometrische Gebilde) verwendet, so ergibt sich der dialektische Sachverhalt, daß solche Gleichungen sehr verschiedene Zahlenwerte der X- und Y-Zahlenart als identische Werte einer und derselben Zahlart definieren. Z. B. hat man hinzunehmen, daß bei den sogenannten Lösungen dieser Gleichungen ein Nullwert der einen Zahlart einem von Null verschiedenen Zahlenwert der anderen Zahlart zugeordnet und die Null somit als identisch mit dem jeweiligen von Null verschiedenen Zahlwert identifiziert werden muß. Und das kann man wohl dialektisch nennen.

3.7.9 Um diese mathematische Dialektik der (arithmetischen) Funktionsgleichungen zu vermeiden, muß man die rein arithmetischen Funktionen als behauptende Korrelationsaussagen notieren: Wenn (evtl. spezifiziertes) X, dann (evtl. spezifiziertes) Y, und umgekehrt.

3.7.10 Wollte man das Wesen einer geometrischen Funktionsgleichung mit zwei Unbekannten (Variablen) in einem logischen Beispiel verdeutlichen, müßte man sagen: Der Gesamtsinn X eines Buches definiert den Gesamtsinn Y seiner Übersetzung in eine andere Sprache und umgekehrt, weil beide denselben gegenständlichen Bedeutungsgehalt besitzen. Für arithmetische Funktions-„Gleichungen" müßte (dialektisch) gelten: Ist ein Buch überhaupt sinnvoll, dann ist es mit einem anderen sinnvollen Buch identisch.

4 Urteile machen den Bestand des Wissens aus. Sie können wahr, falsch oder beides zugleich sein.

4.1 Urteile ergeben sich durch Verknüpfung von Begriffen oder Ausdrücken mit urteils- bzw. satzbildenden Junktoren. In der Mathematik und mathematischen Logik werden die Gleichungen allgemein für behauptende Urteile gehalten (vgl. Kants Beispiel für ein „synthetisches Urteil a priori“: 5 + 7 = 12), und damit mit den Äquivalenzen bzw. Definitionen verwechselt. Die einzige genuin mathematische Behauptungsform ist jedoch die rein arithmetische (also nicht-geometrische) Funktionsgleichung. Sie wird aber zu Unrecht „Gleichung“ genannt. Tatsächlich handelt es sich dabei um eine korrelierende Implikation („Wenn X dann Y, und umgekehrt).

4.2 Sogenannte partikuläre Urteile, die seit Aristoteles in der klassischen Logik als wahrheitswertfähige Urteile behandelt werden, sind Definitionen. Sie ordnen einem extensional unterbestimmten Begriff (Definiendum: einige X) mindestens zwei Bedeutungen zu, die im Negationsverhältnis zu einander stehen. (Z. B. einige Lebewesen = Tiere; einige Lebewesen = Pflanzen, d. h. Nicht-Tiere). Hält man sie für behauptende Urteile, so muß man in Kauf nehmen, daß sie wahr und falsch zugleich sind.

4.2.1 Sogenannte Individualurteile (Definiendum: ein X) sind ebenfalls Definitionen. Sie ordnen einem extensional unterbestimmten Begriff eine einzige Bedeutung zu und unterscheiden es dadurch von den übrigen Individuen. (Z. B. ein Hund = Foxterrier Sophie, d. h kein anderer als dieser). Hält man sie für behauptende Urteile, so muß man in Kauf nehmen, daß mitbehauptet wird, kein anderer als dieser Foxterrier sein ein Hund.

4.2.2 Die in der mathematischen Logik übliche Vereinigung partikulärer und individueller Definienda mit dem Existenzjunktor (es gibt mindestens ein X, welches XY ist) versteht sich zwar als Vereinfachung und Präzisierung der sogenannten Subalternation. Aber die Verknüpfung mit dem Existenzjunktor beruht auf der mathematischen Meinung, daß Gleichungen wahrheitswertfähige Urteile als Existenzbehauptungen über Zahlgebilde seien.

4.3 Urteile verknüpfen Begriffe einer pyramidalen Struktur untereinander. Einfache Urteile verknüpfen nur zwei Begriffe mittels der urteilsbildenden Junktoren als Subjekt- und Prädikatsbegriffe. Komplexe Urteile verknüpfen Begriffe und/oder begriffliche Ausdrücke (die ihrerseits mittels ausdrucksbildender Junktoren aus Begriffen gebildet sind) untereinander. Je nach Komplexitätsgrad von Ausdrücken in der Prädikatsstellung ergeben sich sogenannte Prädikatenlogiken zweiter und höherer Stufe sowie die sogenannte Relationenlogik.

4.4 Wahre Urteile verknüpfen reguläre Begriffe innerhalb einer Begriffspyramide mittels der urteilsbildenden Junktoren gemäß deren Wahrheitsdefinition.

4.4.1 Wittgenstein meinte: „Es ist das besondere Merkmal der logischen Sätze, daß man am Symbol allein erkennen kann, daß sie wahr sind, und diese Tatsache schließt die ganze Philosophie der Logik in sich“ (Tractatus 6.113). Dies gilt offensichtlich für die üblichen logischen Formalismen nicht, sondern es war allenfalls ein logisches Ideal. Wohl aber gilt es für den hier vorgeführten pyramidalen Formalismus.

4.5 Falsche Urteile verknüpfen reguläre Begriffe innerhalb einer Begriffspyramide mittels der urteilsbildenden Junktoren gemäß deren Falschheitsdefinition.

4.6 Wahr-falsche (widersprüchliche) Urteile verknüpfen reguläre (nicht-widersprüchliche) und/oder irreguläre (widersprüchliche) Begriffe mittels der urteilsbildenden Junktoren derart, daß die Verknüpfungen sowohl als wahr wie als falsch gelesen werden können.

4.6.1 Diese Urteile werden oft nicht als widersprüchlich erkannt, wenn der irreguläre Begriff selbst nicht als contradictio in adiecto erkannt wird. In diesem Falle einigt man sich per Konvention auf eine der beiden Lesungen. Z. B. „Sokrates ist sterblich = Sokrates ist tot-lebendig“. Wahr ist, daß Sokrates tot ist, und darum falsch, daß er lebendig ist. Die übliche Lehrbuchformel „alle Menschen sind sterblich“ wird konventionell für wahr gehalten.

4.6.2 Ein kopulatives Urteil, in welchem im Prädikatsausdruck ein positiver Begriff mit seiner Negation adjungiert ist, liefert ein wahr-falsches Gesamturteil (Alle AB sind A und nicht-A). Es ist der Prototyp des widersprüchlichen Urteils. Es kann immer in seine Komponenten aufgelöst werden, auch wenn (in Beispielssätzen) nicht immer festgestellt werden kann, welches der wahre und welches der falsche Satzteil ist.

4.6.3 Solche widersprüchlichen Urteile gelten in der klassischen und in der mathematischen Logik als falsche Urteile bzw. Aussagen. Damit wird aber in dialektischer Weise das darin enthaltene wahre Urteil ebenfalls für falsch erklärt, und dies mit erheblichen Folgen in der Wissenschaftsgeschichte. Was hier „falsch“ genannt wird, ist genau genommen nicht logisch falsch (da es ja wahr und falsch zugleich ist), sondern inhaltlich verwirrend. Es ist auch keineswegs „sinnlos“ (absurd), da es ja in Beispielsfällen verstanden sein muß, um als widersprüchlich qualifiziert zu werden

4.6.4 In paradoxen Formulierungen rufen widersprüchliche Urteile gewöhnlich Perplexionen hervor. Es kommt in ihnen darauf an, die Wahrheit von der Falschheit und umgekehrt abhängig zu machen. Z. B. ist es nach parmenideischer Lehre für das Denken wahr, daß alles Denkbare nur Eines und ruhend ist, und demnach ist die sinnliche Wahrnehmung, daß es Vieles und Bewegung gibt, falsch bzw. täuschend. Für die sensualistischen Empiriker ist es umgekehrt wahr, daß das Fliegen des Pfeiles als Bewegung vieler Pfeile an wechselnden Örtern wahrgenommen wird, und deshalb muß es falsch sein, daß dabei nur ein einziger Pfeil ruht. Deshalb konnte Zenon formulieren: „Der fliegende Pfeil ruht“, um die Lehre des Parmenides zu verteidigen und die Empiriker zu widerlegen. Und Letztere konnten denselben Satz benutzen, um ihre These zu verteidigen und Parmenides zu widerlegen.

4.6.5 Da Paradoxien geschickt formulierte widersprüchliche Urteilsverknüpfungen und als solche wahr und falsch zugleich sind, ist es ein aussichtsloses, jedoch permanentes Arbeitsbeschaffungsprogramm, ihre „Falschheit nachweisen“ oder sie „widerlegen“ zu wollen. Die „Auflösung“ von Paradoxien kann als „Analyse“ nur im Nachweis ihrer Wahr-falschheit bestehen.

4.6.6 Die Alternative ist in der Regel ein kopulatives Urteil, in welchem die eigentliche Alternative als Ausdruck im Prädikat steht (z. B.: alle AB sind entweder A oder nicht A). Sie ist ebenfalls ein wahr-falsches Urteil. Sie gilt in der klassischen und in der mathematischen Logik jedoch als wahr, und dies gerade eben nur dann, wenn der eine (darin enthaltene) Teilsatz wahr und der andere falsch ist. Auch dies hatte und hat erhebliche Folgen in der Wissenschaftsgeschichte. Denn damit wird der falsche Urteilsanteil dialektisch sowohl für wahr als auch für falsch erklärt. Was man bei der Alternative wahr nennt, ist allenfalls ein redliches Eingeständnis des Nichtwissens darüber, welcher Teil der Alternative wahr und welcher falsch ist. Die Urteilsalternative ist daher die klassische logische Form der Forschungsfrage-stellung (vgl. die mittelalterliche Quaestionenmethode, die anstatt „sic et non-Methode“ nach heutigem Junktorenverständnis „Sic-aut-non-Methode“ heißen sollte).

4.6.7 Die aussagenlogische Definition einer falschen Alternative als einer solchen, in der beide Teilsätze wahr oder beide falsch seien, besagt nur, daß ein derartiges Gebilde „keine Alternative“ ist. Denn die Alternative ist immer wahr und falsch zugleich und hat deshalb weder einen besonderen Wahrheits- noch einen besonderen Falschheitswert.

4.6.8 Auch die „nichtausschließende Disjunktion („vel...vel...“) ist in der Regel ein kopulatives Urteil mit einem mehrstelligen Ausdruck im Prädikat. Daß auch das disjunktive Urteil wahr und falsch zugleich sein muß, zeigt sich schon daran, daß der nichtausschließende Junktor „oder...oder...“ präzise (im Beamten-deutsch!) als „und/oder“ gelesen werden kann.

4.7 Wahrscheinlichkeitsurteile spielen in der neuzeitlichen Wissenschaft eine fast dominierende Rolle. Man muß bei ihnen jedoch genau zwischen der (einfachen) logischen und der mathematisch quantifizierten Wahrscheinlichkeit unterscheiden.

4.7.1 Werden Wahrscheinlichkeitsaussagen (z. B. Prognosen) als Urteile (und nicht als nicht-behauptende Vermutungen) behandelt, so sind sie wahr-falsche Alternativen einer positiven und einer negativen

Aussage über denselben Sachverhalt („Der prognostizierte Fall wird eintreten oder er wird nicht eintreten = er tritt wahrscheinlich ein“). Erweist sich die positive Aussage später als wahr (sogenannte Verifikation), so war die negative falsch. Erweist sich die negative Aussage später als wahr (sogenannte Falsifikation), so war die positive Aussage falsch.

4.7.2 Da die logische Wahrscheinlichkeitsaussage das verifizierende und das falsifizierende Urteil zugleich enthält (die logische Alternative hat keinen besonderen Wahrheitswert!), kann man mit ihr – je nach Standpunkt – immer Recht behalten oder immer falsch liegen, gleichgültig, ob sie nachher verifiziert oder falsifiziert wird.

4.7.3 Wahrscheinlichkeitsurteile sind die moderne Gestalt der alten Docta Ignorantia (Sokrates, Nikolaus von Kues, Pascal). Sie vereinigen ein bestimmtes (sei es auch nur vermeintliches) Wissen mit absolutem Nichtwissen über den vermuteten oder prognostizierten Fall.

4.7.4 Das (evtl. vermeintliche) Wissen im logischen Wahrscheinlichkeitsurteil besteht in der traditionellen Überzeugung der Logiker, eine Alternative (aus einem positiven und einem negativen allgemeinen Urteil über einen und denselben Gegenstand) sei schlechthin („apriori“) wahr, während sie doch wahr und falsch zugleich ist. Das Nichtwissen besteht darin, daß man bei einer solchen Alternative (ebenso „apriori“) nicht wissen kann, welcher ihrer Teilsätze der wahre und welcher der falsche ist.

4.7.5 Daher hält auch niemand etwas für wahrscheinlich, wenn er weiß, was der Fall ist, oder wenn er weiß, was nicht der Fall ist.

4.7.6 Der empirische Musterfall des logischen Wahrscheinlichkeitsurteils ist die Prognose des Ausfalls eines Münzwurfs: Entweder Bild oder Zahl, aber auf jeden Fall eines von beiden und eines von beiden nicht. Man rechnet nicht mit dem Fall, daß eine geworfene Münze auf ihrem Rand stehen bleibt!

4.8 Bei mathematisch quantifizierten Wahrscheinlichkeitsurteilen erhöht sich der Wissensanteil, während das Nichtwissen über den Einzelfall bestehen bleibt.

4.8.1 Sogenannte größere und/oder kleinere Wahrscheinlichkeiten erzeugen den Eindruck, als sei man damit näher bei oder weiter entfernt von der Wahrheit. Tatsächlich beziehen sie sich aber auf den Wissensanteil in den Wahrscheinlichkeitssätzen, nicht aber auf das, was man nicht weiß. Deshalb tritt auch das höchst Wahrscheinliche wie auch das am wenigsten Wahrscheinliche entweder ein (bzw. es trifft zu) oder nicht.

4.8.2 Die mathematisch-numerische Formalisierung der Wahrscheinlichkeit geht davon aus, daß die „Wahrscheinlichkeitsgröße“ ein ausrechenbarer Quotient des Verhältnisses des einen Falles zu allen möglichen Fallarten sei. So berechnet man die Wahrscheinlichkeit eines Münzwurfs auf !/2, eines Würfelwurfs auf !/6. Aber das beachtet und erklärt nicht, daß und warum bei jeder so berechneten Wahrscheinlichkeit der einzelne Fall nur entweder eintritt oder nicht eintritt.

4.8.3 Quantifizierte Wahrscheinlichkeitsurteile sind in der Regel kopulative Urteile mit einem mehrstelligen disjunktiven Prädikatsausdruck, welcher eine multiple Artenreihe („mögliche Fälle“) einer gemeinsamen Gattung umfaßt („AXY ist AB und/oder AC und/oder AD, usw.“). Der „und“-Anteil in den disjunktiven Junktoren drückt aus, daß auf alle Arten von Fällen gleichzeitig Bezug genommen wird. Der „oder“-Anteil drückt aus, daß für jedes Glied der Disjunktion die Alternative des Vorkommens oder Nichtvorkommens des Falles besteht.

4.8.4 Der Wissensanteil bei den quantifizierten Wahrscheinlichkeitsurteilen besteht 1. in der traditionellen Überzeugung der Logiker, daß ein disjunktives Urteil wahr sei, wenn mindestens ein Glied der jungierten Alternativen falsch sei. 2. in dem Wissen, daß der Einzelfall nur in einer der jungierten Alternativen tatsächlich vorkommen, dann aber in den übrigen nicht vorkommen kann. 3. in der empirisch (stochastisch) erhobenen oder geschätzten oder „apriori“ konstruierten Quantifikation des Vorkommens von Einzelfällen“ („Haufigkeit“) jeder einzelnen Fallart (Musterbeispiel ist die gleiche Häufigkeit des Würfelfalles für jede der sechs Seiten eines geeichten Würfels). Das Nichtwissen bezieht sich 1. darauf, in welcher Fallart der Einzelfall vorkommen wird. 2. Ob der Einzelfall (in welcher Fallart auch immer) eintreten oder nicht eintreten wird.

4.8.5 Das Wissen gemäß Nr. 2 und 3 muß als nicht ausrechenbarer Quotient (wie beim Torverhältnis im Fußballspiel) formalisiert werden. Beim Würfelwurf ist also die (geringere) „Wahrscheinlichkeit“ „1 : 5“ zu notieren. Damit drückt man aus, daß dem einen (erhofften, prognostizierten oder „wahren“) Fall jeweils fünf andere (unerwünschte, aber ebenfalls prognostizierte „falsche“) Fälle gegenüberstehen.

4.8.6 Der logische (nicht ausrechenbare) Wahrscheinlichkeitsquotient läßt sich (wie beim Torverhältnis) auch umkehren. So etwa, wenn man beim Würfeln eine bestimmte Zahl vermeiden soll, die anderen fünf Zahlen aber als erwünscht gelten. Dann ist die größere Wahrscheinlichkeit für einen glücklichen Wurf als „5 : 1“ zu notieren. Man sagt: Es ist fünfmal wahrscheinlicher, eine der gewünschten Zahlen zu erwürfeln als die unerwünschte Zahl.

4.8.7 In der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie wird die quantifizierte Wahrscheinlichkeit als ausrechenbarer Quotient des *einen* Falles im Verhältnis zu *allen* möglichen Fallarten (also nicht zu den übrigen Fallarten!) formalisiert. Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Würfelfalles wird als 1/6 bestimmt. Ebenso gilt das für die übliche Umrechnung auf Wahrscheinlichkeitsprozente.

4.8.8 Diese verschiedenen Quantifizierungen der Wahrscheinlichkeit zeigen, daß sie für dasjenige, was bei Wahrscheinlichkeitsurteilen wirklich interessiert, gänzlich irrelevant sind: nämlich für das Eintreten oder Nichteintreten des einzelnen Falles. Sie werden aber gewöhnlich dadurch zu beweisen versucht, daß bei genügend häufigen Wiederholungen von Testfällen (etwa des Würfelns) die Häufigkeitsverteilung auf die Grenzwerte der Wahrscheinlichkeiten zulaufen. Aber dies ist eine petitio principii. Denn diese Verteilungen konnte und mußte man schon vorher als wahr wissen, um überhaupt die Wahrscheinlichkeit zu quantifizieren.

4.8.9 Wer einen hohen Wetteinsatz gegen einen sehr geringen wagt, der weiß zwar, daß er mehr gewinnt, wenn er die Wette gewinnt, als er verliert, wenn er verliert. Aber er weiß nicht, ob er gewinnt oder ob er verliert (es sei denn, die Wette wäre nicht fair) .

4.8.10 Durch die genannten Quantifizierungen der Wahrscheinlichkeit wird also nur der Umkreis des Wissens darüber umschrieben, wo überhaupt nichts gewußt wird, nämlich über das Eintreten oder Nicht-Eintreten des einzelnen Falles bzw. das Vorliegen oder Nichtvorliegen einer einzelnen Instanz.

4.8.11 Ein weiterer Fall von Nichtwissen wird in der mathematischen Fuzzy-Logik (von Lotfi Zaheh) mit Wahrscheinlichkeitserwägungen zu logifizieren versucht. Hier teilt man Urteilen mit (qualitativen) Prädikatsbegriffen, deren Extensionen unbestimmt („fuzzy“) sind, Wahrscheinlichkeitswerte zu. Logisch gesehen können solche unscharfen „Begriffe“ allerdings keine Begriffe sein. Die Fuzzy-Logik ist daher genau das, was ihre Bezeichnung bedeutet.

5 Schlüsse, neuerdings oft auch Argumente genannt, sind meistens Urteilsverbände, wie die Aristotelischen Syllogismen und die stoischen (Chrysippschen) Schlüsse. Ihre einfachste Gestalt stellen die implikativen Urteile dar.

5.1 Es gibt drei wahrheitswertfähige Arten einfachster Schlüsse. 1. Die sogenannte formale Implikation verknüpft einen allgemeinen Begriff mit einem in seiner Extension liegenden Unterbegriff. Ihre Wahrheitswerte sind dieselben wie beim speziellen Aristotelischen „Zukommen“ (Wenn Lebewesen, dann Tiere = Leben kommt den Tieren zu). 2. Die sogenannte materiale Implikation verknüpft einen Begriff mit einem seiner Oberbegriffe. Ihre Wahrheitswerte sind dieselben wie die der Kopula (Wenn Tiere, dann Lebewesen = Tiere sind Lebewesen). 3. Die korrelative Implikation verknüpft beliebige gleichrangige Begriffe unter einem gemeinsamen Oberbegriff. Ihre Wahrheitswerte sind dieselben wie die der Negation (Wenn Tiere, dann Pflanzen = Tiere sind nicht Pflanzen; bzw. Wenn Pflanzen, dann Tiere = Pflanzen sind nicht Tiere) und des Existenzjunktors (Wenn Tiere, dann Pflanzen = Es gibt Lebewesen, deren Arten Tiere und Pflanzen sind). Zu den korrelativen Implikationsurteilen gehören die rein arithmetischen Funktionsgleichungen, obwohl sie nicht als solche formuliert werden. Nur die korrelative Implikation eignet sich für die Formalisierung von inhaltlichen Kausalurteilen. Materiale und formale Implikationen dienen dagegen zur logischen Darstellungen von logischen Begründungen bzw. Beweisen.

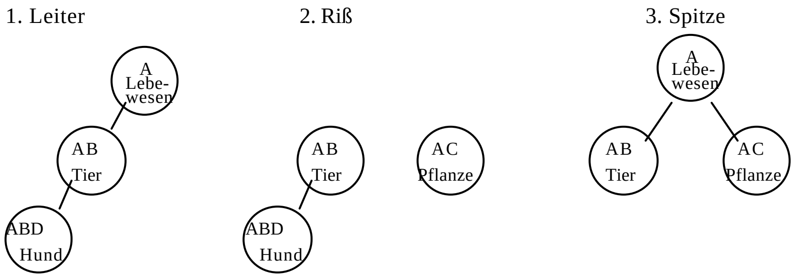
5.2 Die in der Logik als wahrheitswertfähig gehandelte allgemeine Urteilsimplikation liefert ausschließlich wahre Urteile, hat also keinen Falschheitswert. Sie verknüpft Begriffe in einer Pyramide in beliebiger Richtung miteinander und enthält somit die wahren Verknüpfungen der drei speziellen Implikationen gemeinsam, ohne deren einzelne Falschheitswerte zu berücksichtigen. Man bemerke, daß sich bei den Urteilsimplikationen als einfachsten Schlüssen nicht die Frage nach einem „falschen" zweiten Schlußglied stellen kann, da dieses selbst nur ein Begriff, kein wahrheitswertfähiges Urteil ist.

5.3 Aristotelische Syllogismen sind Argumente aus drei Begriffen, deren intensionale und extensionale Verflechtungen in einer Begriffspyramide durch Urteile und/oder Definitionen klar und deutlich dargestellt werden. Der sogenannte Mittelbegriff garantiert dabei den thematischen Kontext, der im pyramidalen Zusammenhang expliziert wird. Die Subsump tionsverhältnisse im Gattungs-Art-Individuum-Zusammenhang der im Syllogismus vorkommenden Begriffe werden durch die Kopula bzw. die materiale Implikation (oder beides zusammen) von unten nach oben, oder (wie oft bei Aristoteles) durch das spezielle „Zukommen" bzw. die formale Implikation (oder beides zusammen) von oben nach unten dargestellt. Ihre Unterscheidungen von Nebenbegriffen werden durch die Urteilsnegation dargestellt.

5.3.1 Da hierbei alles auf die Unter- und Nebenordnung der drei Begriffe ankommt, spielen in den aristotelischen Syllogismen die Quantifikationen die Hauptrolle. Die Nebenordnung kann durch die negierte Kopula („kein...ist") oder durch die Negation eines Begriffes („....ist Nicht-X") dargestellt werden. Die in vielen Syllogismen enthaltenen sogenannten partikulären bzw. individuellen Urteile sind als Definitionen zu lesen (statt „ist" lies „das heißt" oder „ist gleich" bzw. „ = „).

5.3.2 Alle klassischen Syllogismen lassen sich auf drei Verknüpfungsschemata zurückführen. Diese sind nicht die sogenannten syllogistischen Figuren des Aristoteles.

Die drei Begriffskonstellationen in den syllogistischen Modi



5.3.3 In der „Leiter" wird eine Unterart bzw. ein Individuum mit einem Artbegriff, dieser mit seiner Gattung und im engeren „Schluß" ersteres mit letzterem verknüpft.

5.3.4 Im „Riß" werden Unterart und Artbegriff verknüpft und beide durch Negation von einer Nebenart unterschieden.

5.3.5 In der „Spitze" werden zwei Artbegriffe gegeneinander abgegrenzt und mit ihrer Gattung verknüpft.

5.4 In den Syllogismen lassen sich einige oder alle Sätze auch im Konjunktiv einsetzen. Die Implikationsjunktoren lassen dies gewöhnlich nicht erkennen, wohl aber die mit ihnen jeweils synonymen Junktoren („ist" und „kommt zu"). „Wenn ... dann" muß in diesen Fällen als „falls... so wäre..." gelesen werden. Dadurch lassen sich allerdings keine Behauptungen, sondern nur Vermutungen bzw. Hypothesen formalisieren. Es handelt sich dann um die auch schon von Aristoteles behandelten hypothetischen bzw. Wahrscheinlichkeits- Schlüsse. Sie sind, ebenso wie entsprechende stoische Schlüsse im Konjunktiv, wichtige heuristische Forschungsinstrumente. Sie dienen dazu, „modale Welten" zu konstruieren.

5.4.1 Bei den hypothetischen Syllogismen zwingt der pyramidale Formalismus den beliebig in Begriffspositionen eingesetzten Intensionen ihre junktorielle Struktur auf. Um in der üblichen logischen Praxis die

Wahrheitswertfunktion der Junktoren zu retten, unterscheidet man dies dann als sogenannte „Geltung“ bzw. „Gültigkeit“ des Formalismus von den (hypothetischen) inhaltlichen Erwägungen. Man sagt: der logische Formalismus ist gültig, aber die Inhalte sind falsch, z. B. „Wenn alle Menschen Vögel sind, und wenn alle Vögel fliegen, dann fliegen alle Menschen“. Genau muß man jedoch sagen: „Falls alle Menschen Vögel wären, und wenn alle Vögel fliegen würden, dann flögen alle Menschen“. Niemand wird diese Vermutung als Behauptung mißverstehen.

5.4.2 Der traditionelle Brauch, Vermutungen und Hypothesen logisch im Indikativ als behauptende Urteile zu behandeln, führt zu den merkwürdigen, aber wissenschaftsgeschichtlich verheerenden Wahrheitsdefinitionen der Implikation: „Ein falscher Schluß aus falschen Prämissen ist wahr“ und „ein wahrer Schluß aus falschen Prämissen ist wahr“. So sehen denn auch viele streng logische Abhandlungen aus, die als „wahre“ Forschungsbeiträge aus langen Schlußketten gehandelt werden. Ebenso hat die dritte Implikationsdefinition: „ein falscher Schluß aus wahren Prämissen ist falsch“ oft dazu geführt, verzweigte wahre Prämissentheorien wegen eines falschen Schlußsatzes aus ihnen insgesamt als „falsch“ zu verwerfen.

5.4.3 Die traditionellen Formulierungen der Implikationsregeln „Veritas sequitur ex quolibet“ (Wahres folgt aus Beliebigem) und „Ex falso sequitur quodlibet“ (Aus Falschem folgt Beliebiges) sind daher mit Vorsicht zu benutzen. Wahres folgt nur dann aus Beliebigem, wenn es darin Wahres (neben evtl. Falschem) gibt. Und aus Falschem kann nur dann Beliebiges (Wahres und/oder Falsches) folgen, wenn das Falsche als Widersprüchliches verstanden wird, das neben dem Wahren das Falsche mitenthalten muß..

5.5 Die sogenannten stoischen Schlüsse (Chrysipps fünf „Indemonstrable“) sind Argumente, in denen zwei Begriffe in einem pyramidalen Zusammenhang gemäß den möglichen junktoriellen Verknüpfungen eingeführt („es gibt...“) oder eliminiert („es gibt nicht...“) werden. Die Negation des Existenzjunktors wird, wie vorn gezeigt, formal nur auf die Extension des jeweiligen Begriffs, inhaltlich jedoch auf die Existenz eines entsprechenden Gegenstands oder Sachverhalts bezogen.

5.5.1 Der Einführung oder Eliminierung eines Begriffs im pyramidalen Formalismus entspricht also gemäß dem nicht-formalen Logikverständnis der Stoiker die inhaltliche Behauptung oder Negierung der wirklichen Existenz von Gegenständen, die unter den jeweiligen Begriff fallen.

5.5.2 Die stoischen Schlüsse i. e. S. behaupten demnach die Existenz oder die Nichtexistenz des unter den einen Begriff Fallenden in Abhängigkeit von der Existenz oder Nichtexistenz von Gegenständen, die unter den anderen Begriff fallen (sog. modus ponens und modus tollens).

5.5.3 Gemäß der universaldeterministischen Ontologie der Stoiker lassen sich ihre Schlüsse nur auf die logische Klärung des Verhältnisses von Ursache und Wirkung bzw. von Wirkung und Ursache beziehen. Ein Ursache-Wirkungsverhältnis kann aber nur durch die korrelierende Implikation zwischen Nebenartbegriffen dargestellt werden. Denn weder kann die Gattung Kausalursache für Unterbegriffe noch können Unterbegriffe Kausalursache für ihre Gattungen sein. Nur so erklärt sich der Sinn der fünf „indemonstrablen“ Schlußformen. Die Prämissen dieser Schlüsse sind ersichtlich hypothetische Vermutungen, die im sprachlichen Konjunktiv formuliert sind. Andernfalls wäre der Schlußsatz eine bloße Wiederholung derselben, und das haben die Stoiker bei den Urteilen und Schlüssen ausdrücklich ausgeschlossen.

5.5.4. „Wenn (falls) es Ursachen gäbe, würde es auch Wirkungen geben. Nun gibt es (im diskutierten Beispielsfall) Ursachen. Also gibt es (auch) Wirkungen“.

5.5.5 „Wenn (falls) es Ursachen gäbe, würde es auch Wirkungen geben. Nun gibt es (im diskutierten Beispielsfall) keine Wirkungen. Also gibt es (auch) keine Ursachen“.

5.5.6 „Ursachen und Wirkungen könnten nicht zusammen existieren. Nun gibt es Ursachen. Also gibt es (noch) nicht Wirkungen“.

5.5.7 „Entweder gäbe es Ursachen oder es gäbe Wirkungen. Nun gibt es (im Beispielsfall gegenwärtige) Ursachen. Also gibt es (noch) keine Wirkungen“.

5.5.8 „Entweder gäbe es Ursachen oder es gäbe Wirkungen. Nun gibt es (im Beispielsfall gegenwärtig) keine Wirkungen. Also gibt es (nur gegenwärtige) Ursachen".

5.6 Werden die Prämissen der stoischen Schlüsse in den Beispielsfällen im sprachlichen Konjunktiv gelesen, d. h. als Vermutungen bzw. Hypothesen formuliert („Falls es A gäbe, müßte es auch B geben...") so ergibt der Schlußsatz i. e. S. als Forschungsergebnis eine Verifikation oder Falsifikation der Vermutung („Nun gibt es A, also gibt es auch B" bzw. „Nun gibt es nicht B, also auch nicht A"). Die stoischen Schlußformen sind daher ebenso wie die hypothetischen Syllogismen zu heuristischen Forschungsinstrumenten und zu eristischen Argumentationsschemata geworden. Für die Antike findet man sie zahlreich im Madhyamaka-Karika des Nagarjuna (2.-3. Jh. n. Chr.). In der Mathematik lautet die entsprechende Einführungsformel für Begriffe und Ausdrücke: „Gegeben sei ...., dann...".

5.7 Auch die sogenannte Aussagenlogik wird gewöhnlich als moderne Gestalt der Schlußlehre angesehen. Ihre Schlüsse sollen darin bestehen, daß aus beliebigen wahren und/oder falschen Aussagen (die als behauptende Urteile verstanden werden) auf die Wahrheit oder Falschheit einer sich daraus als Schlußsatz ergebenden Aussage geschlossen wird, z. B.: „Wenn p (wahre Aussage) und -q (falsche Aussage), dann -r (falsche Aussage)". Dabei wird keinerlei thematischer Zusammenhang der einzelnen Sätze im Schluß vorausgesetzt (wie er bei Aristoteles durch den „Mittelbegriff" und hier durch den pyramidalen Begriffszusammenhang garantiert wird). Die mathematische Logik formuliert diese Sachlage in der Form von Gleichungen: „p und -q = -r", wobei sie, wie schon vorn gezeigt, Gleichungen für behauptende Urteile bzw. Aussagen hält. Diese Auffassung ist aus mehreren logischen Gründen falsch.

5.7.1 Gleichungen sind Definitionen. Also liefert auch die ganze Aussagenlogik (vgl. die Wittgensteinschen Wahrheitswerttafeln des „Tractatus logico-philosophicus" nur Definitionen eines angeblichen Wahrheitswertes von jungierten Ausdrücken. Sie erscheinen nur deshalb plausibel, weil einige derselben so gewählt sind, daß sie mit den Wahrheitswerten stoischer Schlüsse übereinstimmen.

5.7.2 Daß Wittgenstein kein Beispiel für einen „Elementarsatz" angegeben hat, läßt sich leicht verstehen. „Der Elementarsatz besteht aus Namen. Er ist ein Zusammenhang, eine Verkettung, von Namen" (Tractatus 4.22). Diese Definition trifft auf jungierte Ausdrücke zu, die nicht wahrheitswertfähig sind, keineswegs aber auf wahrheitswertfähige Aussagen bzw. Urteile.

5.7.3 Bei inhaltlichen Urteilen bzw. Aussagen läßt sich erkennen, ob sie als wahre oder falsche Behauptungen gemeint sind (wahr-falsche, also widersprüchliche Urteile werden auch in der Aussagenlogik als falsche Aussagen behandelt!). Bei ihrer Formalisierung durch die Zeichen für Aussagen bzw. „Elementarsätze" (meist p und q) wird ihnen ein Wahrheitswert zugeschrieben (z. B.: p = wahre Aussage; -p = falsche Aussage). Diese Formalisierung verwandelt aber den inhaltlichen Beispielsatz, der ein behauptendes Urteil ist, in einen nicht-wahrheitsfähigen Ausdruck: „Wahre Aussage" ist nicht selbst eine wahre Aussage, sondern ein logischer Ausdruck, der eine besondere Aussageart bezeichnet, ebenso wie „falsche Aussage".

5.7.4 Durch die aussagenlogische Formalisierung der Implikation wahrer oder falscher inhaltlicher Sätze wird nicht nur der Satz bzw. die Aussage in einen nicht-wahrheitswertfähigen Ausdruck verwandelt. Vielmehr geht auch der thematische Zusammenhang, der in den aristotelischen Syllogismen durch den Mittelbegriff gewährleistet ist, ebenso verloren wie der logische Unterschied zwischen Prämissen und Schlußsatz. Man hat sich daran gewöhnt, in aussagenlogischen Beispielsätzen etwa zu argumentieren: „Wenn Paris die Hauptstadt von Frankreich und die Drei eine Primzahl ist, dann fällt der 19. November 2004 auf einen Freitag" (Wenn p und q, dann r) oder „Wenn Paris die Hauptstadt von Marokko und die Vier eine Primzahl ist, dann fällt der 19. November 2004 auf einen Samstag" (Wenn –p und –q, dann –r). Beide Argumente gelten aussagenlogisch als „schlüssig" bzw. „gültig" und somit als wahr. Und zwar, weil im ersten Argument auf zwei wahre Prämissen ein wahrer Schlußssatz folge, und weil im zweiten Argument auf zwei falsche Prämissen ein falscher Schlußsatz folge. Ersichtlich kann man in jedem solchen Argument die Reihenfolge der Aussagen beliebig verändern, weil keine mit den beiden anderen thematisch zusammenhängt und damit weder eine Prämissen- noch eine Schlußrelevanz hat. Erst recht müßte man bei inhaltlichen Sätzen der Aussagenlogik schon vor allem vermeintlichen Folgern und Schließen wissen, ob die vermeintlichen Prämissen und der Schlußsatz jeweils wahr oder falsch sind, um den Wahrheitswert des Argumentes zu ermitteln. Die aussagenlogische Formalisierung ist also nicht nur überflüssig, sondern auch irreführend.

5.7.5 Durch die aussagenlogische Formalisierung werden alle vorgeblichen Aussageweisen mit den verschiedenen Junktoren zu definitionsbedürftigen Ausdrücken. Z. B. lautet die Definition einer der vier möglichen Kombinationen des sog. logischen Produkts: „wahre Aussage und falsche Aussage = falsche Aussage“, entsprechend diejenige der Alternative „entweder wahre oder falsche Aussage = wahre Aussage“, entsprechend diejenige der Implikation „wenn wahre Aussage dann falsche Aussage = falsche Aussage (genauer: falscher Schluß bzw. ungültiger Schluß)“. Mit diesen willkürlichen Definitionen täuscht sich die Aussagenlogik seit nunmehr ca. achtzig Jahren über die offenkundige Tatsache hinweg, daß „wahre Aussage“ bzw. „falsche Aussage“, in welcher Kombination auch immer, nur einen nicht-wahrheitswertfähigen logischen Ausdruck darstellt.

5.8 Wahrscheinlichkeitsschlüsse deduzieren aus wahren Prämissen ein Scheinwissen in der logischen Form eines (widersprüchlichen) Wahrscheinlichkeitsurteils. Scheinwissen heißt, daß in ihnen ein Nichtwissen als Wissen erscheint. Auch sie sind Formalisierungen der Docta Ignorantia, also einer gelehrten Unwissenheit.

5.9 Zahlenmäßig quantifizierte Wahrscheinlichkeitsschlüsse werden in der mathematischen Logik als Instrument der „rationalen“ Lösung von Problemen der Entscheidungsfindung in Riskolagen sowie beim Glücks- oder Wettspiel empfohlen. Diese Problematik stellt sich exemplarisch im Verhältnis von Diagnose und Prognose etwa bei Krankheitsverläufen, Geschäftslagen, politischen Situationen, sowie bei Lotterien bzw. Wetten und Glücksspielen. Die Theorie der mathematisch-statistischen Wahrscheinlichkeitsschlüsse erfüllt das Comtesche Programm des „Savoir pour prévoir“. Aber auch dabei handelt es sich um eine mathematisch eingekleidete Docta ignorantia.

5.9.1 Es ist jedoch eine Irreführung der Kundschaft der sogenannten Wahrscheinlichkeitslogik und der angewandten Mathematik, wenn behauptet wird, daß die Wahrscheinlichkeitsschlüsse „Instrumente des richtigen (gehaltserweiternden) Schließens und der Bestätigung von Hypothesen“ seien, bzw. daß dabei „gewisse Wahrscheinlichkeiten von den Prämissen (Hypothesen) auf die Konklusion (These) übertragen“ würden (Vgl. J. Mittelstraß, Hg., Art. Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitslogik). Alles hier eingesetzte Wissen besteht in wahren Prämissen, der Schlußsatz formuliert selbst die Hypothese bzw. Vermutung in der Form eines widerspruchsvollen Urteils. Erst die (ex-post-)Verifikation oder Falsifikation, die selbst keine Hypothesen sind, bestätigen bzw. widerlegen jeweils eine der im Wahrscheinlichkeits-Schlußurteil enthaltenen Thesen.

5.9.2 Wären Wahrscheinlichkeitsschlüsse – so wie die Bezeichnung es insinuiert und die meisten gerne möchten – näher bei der Wahrheit als bei der Falschheit, so gäbe es keine Glücksspiele, Wetten, Lottos oder Börsenspekulationen.

5.9.3 Wahrscheinlichkeitsschlüsse sind nicht dazu geeignet, unbekannte Kausalitäten aufzudecken. Niemand weiß, ob „alles“ kausal bedingt ist. Und wenn es so wäre, wie die Stoiker mit ihrem Universaldeterminismus annahmen, dann wäre Kausalität auch generisches Merkmal aller Arten und jedes Einzelfalles. Deshalb kann Kausalität nicht selbst Gegenstand von Wahrscheinlichkeitsschlüssen sein.

5.9.4 Wahrscheinlichkeitsschlüsse zeigen auch nicht, daß „alles“ zufällig bzw. indeterminiert ist, wie die Epikureer annahmen. Denn auch dies müßte – ggf. als Spontaneität oder Freiheit – induktiv erkannt und als generisches Merkmal in alle Arten und Einzelfälle eingehen.

6 Theorien sind logisch geordnete Begriffspyramiden über einem abgegrenzten Erfahrungsbereich.

6.1 Soweit Theorien nur hinsichtlich der in ihnen enthaltenen Begriffe und ihrer Definitionen interessieren, handelt es sich bei ihnen um das, was Sneed und Stegmüller als „Kern“ (core) herausgestellt haben. Es handelt sich dann um einen „nicht aussagemäßigen Gesichtspunkt“ (non statement view) der Theorie.

6.2 Der pyramidal formalisierte „harte Kern“ einer Theorie kann mittels der Junktoren in behauptenden Urteilen und Schlüssen gelesen werden. Dadurch wird der „aussagemäßige Gesichtspunkt“ (statement view) der Theorie aktiviert.

6.3 Nach dem Vorbild der „Elemente“ des Euklid (der dies für die Darstellung des geometrischen und arithmetischen Wissens seiner Vorgänger und Zeitgenossen vorführte) werden bei Theorien (axiomatische) Grundsätze und davon ableitbare („beweisbare“) Lehrsätze (Theoreme) unterschieden. Die Grundsätze sind dann Behauptungssätze, welche die axiomatischen Grundbegriffe enthalten.

6.3.1 Theorien können induktiv oder deduktiv konstruiert werden.

6.3.1 Basisbegriffe einer induktiven Theorie sind unterste Artbegriffe. In manchen Theorien dienen sogenannte Eigennamen und Kennzeichnungen als spezifische Differenzen ihrer Basisbegriffe. Alle anderen Begriffe der Theorie sind induktiv durch Weglassen der spezifischen Differenzen und Festhalten der gemeinsamen generischen Merkmale aus diesen zu induzieren bzw. zu abstrahieren. Das gilt insbesondere für die höchsten Gattungsbegriffe („Grundbegriffe“) der Theorie. Die (von K. Popper) behauptete „Theoriebeladenheit“ aller empirischen Beschreibungen von Fakten und Daten beruht, sofern sie vorkommt, darauf, daß die „theoretischen Terme“ schon Ergebnis des Alltagswissens oder älterer wissenschaftlicher Induktionen sind, die zu einer Deduktion benutzt werden.

6.3.2 Der Idealismus ist seit George Berkeley eine induktive metaphysische Theorie über die gesamte Wirklichkeit. Zur Wirklichkeit gehört jedoch nicht nur das sensuell induzierte „Sein“, wie Berkeley behauptete, sondern auch ein durch sinnliche Erfahrung induziertes „Nichts“.

6.3.3 Deduktive Theorien dienen einerseits zur Kontrolle induktiver Theorien, indem sie die Regelmäßigkeit des induktiven Prozedere in umgekehrter Richtung nachvollziehen. Andererseits können sie ein formales Gerüst für die Zuordnung von Termini entwerfen, mit welchem bislang nichtformalisierte Wissensgehalte logisch geordnet werden können.

6.3.4 In deduktiven Theorien können „dialektische“ Begriffspositionen vorgesehen werden. Dadurch werden widersprüchliche Begriffe definiert und ggf. fruchtbar für den heuristischen Gebrauch des Kerns der entsprechenden Theorie eingesetzt. Dies ist in Theorien der Mathematik in der Regel der Fall. Ein Beispiel stellt die vorgeführte Pyramide des Zahlbegriffs dar.

6.3.5 Kommen in deduktiven Theorien widersprüchliche Begriffe vor, so zeigt sich dies bei der Bildung von Urteilen, die mit anderen Urteilen der Theorie in Widerspruch geraten. Bei mathematischen Theorien führt das regelmäßig zu Paradoxien, deren Aufdeckung bzw. Deduktion als besondere Leistung gilt.

6.3.6 Der Realismus ist seit jeher eine deduktive dialektische Theorie der Metaphysik. Er enthält dieselben Behauptungen wie die idealistische Theorie. Aber zu jeder Behauptung enthält er eine kontradiktorische Gegenbehauptung. Z. B. wird „Ding-an-sichhaftes Sein“ nur bewußtseinsmäßig erfahren und gedacht – was der Idealismus annimmt (indem er zwischen Ding an sich und Erscheinung nicht unterscheidet oder Dinge an sich als bewußte „Noumena“ behandelt) -, und zugleich wird vom Realismus behauptet, daß die Dinge an sich „unabhängig“ von allem Bewußtsein und letztlich unerkennbar seien. Der Realismus ist daher keine Alternative zum Idealismus, sondern eine dialektische Erweiterung desselben, passend zur quadrivialen Naturwissenschaft, die seit jeher „bewußt“ das „Bewußtsein“ als subjektiven Faktor von angeblich objektiver Erkenntnis auszuschließen sucht.

6.4 Widersprüche in Theorien lassen sich durch Überprüfung und ggf. genauere Definition der involvierten Begriffe eliminieren. Es ist fahrlässig, aber in der „logischen Kritik“ von Theorien üblich, ganze Theorien wegen eines in ihnen auftretenden Widerspruchs bzw. einer Paradoxie für falsch zu halten und sie ggf. zu verwerfen. Da Urteilswidersprüche wahr und falsch zugleich sind, werden so auch die wahren Sätze der Theorie verworfen, mit erheblichen Folgen für die Wissenschaftsentwicklung.

6.4.1 Dialektische Theorien beziehen widersprüchliche Begriffe und widersprüchliche Urteile absichtlich oder unerkannt ein. Beispiele für ersteres sind die Theologien des Tertullian („Credo quia absurdum“), des Abaelard („Sic et non“) und des Nikolaus von Kues (Coincidentia Oppositorum“), mancherlei kokette Aperçues Nietzsches („Wahrheit = Irrtum“), sowie viele linkshegelianische Theorien („das Nicht-

Identische“, „repressive Toleranz“, „Friedens-Kampf“ usw.). Im vorliegenden Traktat wird die Existenz und das Wesen derselben logisch ernst genommen und hinsichtlich ihrer logischen Relevanz analysiert. Beispiele für letzteres bieten die Modallogik und die sog. mehrwertigen Logiken sowie große Teile der mathematischen und mittels dieser auch der physikalischen Theoriebildungen. Gelegentliche Widersprüche in der juristischen Begriffsdogmatik („straffreier Straftatbestand“) beruhen auf Formelkompromissen des Gesetzgebers. Sie haben niemals dazu geführt, die Dogmatik bzw. die mit solchen Begriffen umgehende Theorie für „falsch“ zu erklären.

6.4.2 Beispiele für pyramidale Formalisierungen ganzer Theorien finden sich bei Ralf Goeres, Die Entwicklung der Philosophie Ludwig Wittgensteins unter besonderer Berücksichtigung seiner Logikkonzeptionen, Würzburg 2000, S. 355, sowie L. Geldsetzer, Über das logische Prozedere in Hegels Phänomenlogie des Geistes, in: Jahrbuch für Hegelforschung, hgg. von H. Schneider, Band 1, Sankt Augustin 1995, S. 43 – 8o, bes. S. 75 und 80.

6.5 Logisch sind Theorien das geblieben, was das griechische Wort „theoria“ ursprünglich meinte: eine „Gesamtanschauung“ eines Erfahrungsbereiches. Die Aufteilung der Erfahrungsbereiche in Disziplinen führte dazu, die „Lehre“ (doctrina) dessen, was in einer Disziplin an Kenntnissen und Einsichten gesammelt worden war, eine Theorie zu nennen. Eine doktrinäre Theorie bestand aus Begriffen, Urteilen und Schlüssen, und die Logik als Disziplin lehrte, was diese sind und wie mit ihnen eine „Gesamtanschauung“ der Fakten und Daten und ihrer Verknüpfungen zu artikulieren sein sollte.

6.5.1 Die antiken Philosophen machten zuerst die Natur, dann die Kultur und schließlich die ganze Welt zu ihrem Erfahrungsbereich. Sie entdeckten dabei, daß sie je nach den von ihnen gewählten Induktionsrahmen für ihre höchsten bzw. allgemeinsten Begriffen (archai) gänzlich verschiedene Theorien über die gemeinsame Welt hervorbrachten. Die Verschiedenheit ihrer „Weltanschauungen“ wurde zum Vorbild aller späteren Theorienpluralismen in den Disziplinen und Einzelwissenschaften.

6.5.2 Die Mathematiker hielten seit Euklids Zusammenfassung der geometrischen und arithmetischen Erkenntnisse seiner Vorgänger das Ideal aufrecht, daß es in der Mathematik und ihrer späteren Entfaltung in geometrische und arithmetische Disziplinen jeweils nur eine Theorie in jedem disziplinären Bereich geben könne, welche die wahre und richtige sein sollte.

6.5.3 Das übernahmen die Physiker von den Mathematikern. Zuletzt glaubten sie, zur „Relativitätstheorie“ und zur „Quantentheorie“, die sie für die wahren Theorien der Makro- und Mikrophysik schlechthin ausgeben, gäbe es in der Physik keine Alternativen. Wenn es so wäre, könnte das aber nur heißen, daß es seit ca. hundert Jahren keinen wesentlichen theoretischen Fortschritt in der Physik gegeben hätte.

7 Axiome sind oberste Gattungsbegriffe von Theorien, die durch die Pyramide oder die Pyramiden aller unter ihnen stehenden Begriffe konstituiert werden. Deshalb müssen sie, um überhaupt reguläre Begriffe zu sein, induktiv gewonnen werden. Die Stoiker hielten sie für angeborene gemeinsame Denkgrundlagen aller Menschen (koinai ennoiai, notiones communes), Euklid nach Platon für eingeborene Ideen. Nach klassischem aristotelischem Definitionsmuster sind oberste Gattungen jedoch nicht definierbar. Diese (falsche) Meinung des Aristoteles erwies sich in den sog. axiomatischen Systembildungen als Einladung, nach der Maxime zu verfahren: „Was man nicht erklären kann, das setzt als Axiom man an“. Ihre sogenannte implizite Definition besteht dann bestenfalls in dem Nachweis, daß ihre Intensionen als generische Merkmale in allen unter ihnen stehenden Begriffen enthalten sind. Und dies läuft in der Regel auf eine Petitio principii hinaus, denn es wird dabei aus dem axiomatischen Grundbegriff deduziert, was induktiv in ihn hineingelegt worden ist. Vgl. dazu: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik“ (D. Hilbert, Axiomatisches Denken (1918), in: Ges. Abh. III, 156).

7.1 Als oberste Gattungen der Logik gelten die Begriffe Identität, Widerspruch und Drittes. Daß sie dies seien, wird allerdings durch die logischen Normen bzw. Regeln ihrer Anwendung in logischen Verhältnissen, nämlich die Identität zu wahren, den Widerspruch zu vermeiden und das Dritte auszuschließen, nicht erwiesen. Die Nichtbefolgung dieser Normen expliziert nur andere Logiktypen und evtl. unlogisches Denken. Deshalb sind Identität, Widerspruch und Drittes keine logischen Axiome, sondern abgeleitete Art-Begriffe der Logiktheorie.

7.1.1 Was Identität, Widerspruch und Drittes logisch bedeuten, läßt sich wie folgt definieren: Identität = Bedeutung gleicher Zeichen im Formalismus. Widerspruch im Begriff = Verschmelzung vollständig disjunktiver (dihäretischer) Begriffe zu einem (einzigen dialektischen) Begriff; Widerspruch im Urteil = wahr-falsche Adjunktion eines positiven allgemeinen Urteils und seiner Negation. Das Dritte = Urteils-Widerspruch selber, soweit er sich auf Logisches bezieht. Ansonsten dasjenige, was als „weder wahr noch falsch" gilt, wie etwa die Sätze fiktiver Literatur.

7.2 Die von der mathematischen Axiomentheorie aufgestellten Kriterien für Axiome sind weder selber Axiome noch sind sie überhaupt sinnvoll anwendbar. Diese lauten bekanntlich: Unabhängigkeit (von einander), Widerspruchslosigkeit, Vollständigkeit und ggf. Evidenz. Wenn Axiome unabhängig von einander sein sollen, können sie nicht auf Widerspruchslosigkeit hin geprüft werden. Wenn sie widerspruchslos sein sollen, können sie nicht unabhängig von einander sein. Wenn sie vollständig sein sollen, müssen sie vollständig induziert sein, und es müssen schon alle Sätze der sich ergebenden Theorie aus ihnen abgeleitet, begründet und bekannt sein. Wenn sie evident sein sollen, müssen zumindest ihre Intensionen und Extensionen bekannt sein.

7.2.1 Daß die „Principia mathematica" (in B. Russells gleichnamigem Werk) unentscheidbare Grundsätze enthalten, wie Gödel diagnostizierte, ergibt sich daraus, daß diese widersprüchliche Grundbegriffe und daraus gebildete Urteile sind, aus denen sich Wahrheit wie auch Falschheit von mathematischen Theoremen deduzieren lassen.

7.3 Die tatsächlichen Axiome der Logik sind die Begriffe Wahrheit, Falschheit und Wahr-Falschheit bzw. Wahrscheinlichkeit. Man kann die Wahrheit das erste Prinzip nennen, die Falschheit das zweite, und die Wahr-Falschheit bzw. die Wahrscheinlichkeit das dritte. Die sprachliche Bezeichnung der Wahr-Falschheit als Wahrscheinlichkeit drückt die Verschmelzung von „wahr" und „falschem Schein" im Wahrscheinlichkeitsverständnis aus.

7.4 Wahrheit und Falschheit sind die obersten regulären Gattungsbegriffe der Logik und somit ihre begrifflichen Axiome. In ihren Extensionen spielen alle logischen Urteile und Schlüsse. Sie stehen im Negationsverhältnis zueinander. Daher lassen sich aus ihnen die axiomatischen Grundsätze bilden: Wahrheit ist nicht Falschheit; sowie: Falschheit ist nicht Wahrheit.

7.4.1 Das einzige Merkmal des Wahrheitsbegriffs bedeutet: logische Kohärenz. Diese zeigt sich im definitionsgemäßen Gebrauch und entsprechender Lesung der satzbildenden Junktoren in Anwendung auf reguläre Begriffe.

7.4.2 Das einzige Merkmal des Falschheitsbegriffs bedeutet: logische Inkohärenz bzw. Nicht-Kohärenz. Diese zeigt sich im definitionswidrigen Gebrauch und entsprechender Lesung der satzbildenden Junktoren in Anwendung auf reguläre Begriffe.

7.5 Wahr-Falschheit bzw. Wahrscheinlichkeit ist ein kontradiktorischer Begriff, der aus der Verschmelzung von Wahrheit und Falschheit entsteht. In seiner Extension liegen alle wahren und falschen sowie die wahr-falschen bzw. Wahrscheinlichkeitsurteile und –Schlüsse. Und zwar deswegen, weil widerspruchsvolle Begriffe keine eigene, sondern eine aus den Extensionen der verschmolzenen Ausgangsbegriffe zusammengesetzte Extension haben. Merkmale der Wahrscheinlichkeit sind Kohärenz und Inkohärenz.

7.6 Begriffe, Ausdrücke und alle nicht-behauptenden sprachlichen Artikulationen wie Fragen, Imperative, Normen, Regeln sind nicht wahr und nicht falsch, da sie nicht unter die logischen Prinzipien von Wahrheit und Falschheit fallen.

7.7 Fiktive Literatur und im weiteren Sinne Dichtung wird meist für weder wahr noch für falsch gehalten, obwohl sie wesentlich in behauptenden Sätzen artikuliert wird. Daß die Dichtung jedoch von Platon für „lügnerisch“ (also für falsch), von Aristoteles aber für „wahr“ gehalten wird, welche Einschätzungen bis heute Anhängerschaft besitzen, bedarf der logischen Erklärung.

7.7.1 Die Erklärung liegt darin, daß der junktorielle Ausdruck „weder wahr noch falsch“ (= „nicht wahr und nicht falsch“) auch dazu dient, die dihäretischen Begriffe „wahr“ und „falsch“ auszutauschen. Denn was nicht wahr ist, gilt demnach als falsch, und was nicht falsch ist, gilt als wahr. Deshalb müssen fiktive Behauptungen, die „weder wahr noch falsch“ (= nicht wahr und nicht falsch“) sein sollen, eben „falsch und wahr“ zugleich sein. Und deshalb haben sowohl Platon wie auch Aristoteles in ihrer Einschätzung der Dichtung recht.

7.7.2 Da man fiktive Literatur gewöhnlich nicht unter Wahrscheinlichkeitsgesichtspunkten betrachtet, kann und muß man ihre wahren und falschen Anteile unterscheiden, um sie überhaupt zu verstehen.

7.7.3 Ein bedeutender Teil der wissenschaftlichen Literatur besteht in „Science-fiction“. Den logisch interessanten Teil darin stellen die sogenannten Gedankenexperimente dar.

7.7.4 Science-fiction-Literatur mit Gedankenexperimenten dürfte sich gegenwärtig besonders häufig in der nicht-veröffentlichten Antragsliteratur für Drittmittel finden. Sie ist ihrer logischen Natur gemäß weder verifikations- noch falsifikationsfähig. Die Prinzipien ihrer Beurteilung können daher weder logische noch, soweit Logik das Wesen der Wissenschaftlichkeit ausmacht, wissenschaftliche sein.

7.7.5 Was nicht heißt, daß nicht auch in der Wissenschaft moralische Prinzipien der Wahrhaftigkeit, der Abwehr von Lug und Trug und der Vorsicht gegenüber Wahrscheinlichkeitsversprechen eine ausschlaggebende Rolle zu spielen hätten.